ISSN 0185-6200

MATHESIS

Vol. VII ■ *No. 3* ■ *Agosto 1991*

filosofía e historia de las matemáticas

Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México

MATHESIS

Revista de investigación, divulgación e información en Filosofía e Historia de las Matemáticas

Volumen VII, Número 3, agosto 1991

Contenido

editorial

artículos

Alejandro Garciadiego, *Inauguración* 275

Joseph W. Dauben, *El teorema pitagórico y las matemáticas chinas. Los comentarios de Liu Hui sobre el teorema Gou-Gu en el capítulo nueve del Jiu Zhang Shu* 279

Wilbur R. Knoor, *Sobre corazones y hojas de hiedra: lo que los antiguos griegos hicieron con las curvas* 303

Janis Langins, *La codificación y matematización de la ingeniería francesa en el siglo XVIII: el caso de Bernard Forest de Bélidor* 321

Craig G. Fraser, *Ecuaciones diferenciales en la teoría de perturbaciones planetarias de Lagrange* 339

Ivor Grattan-Guinness, *Boole y su semi-seguidor Jevons* 351

notas educativas

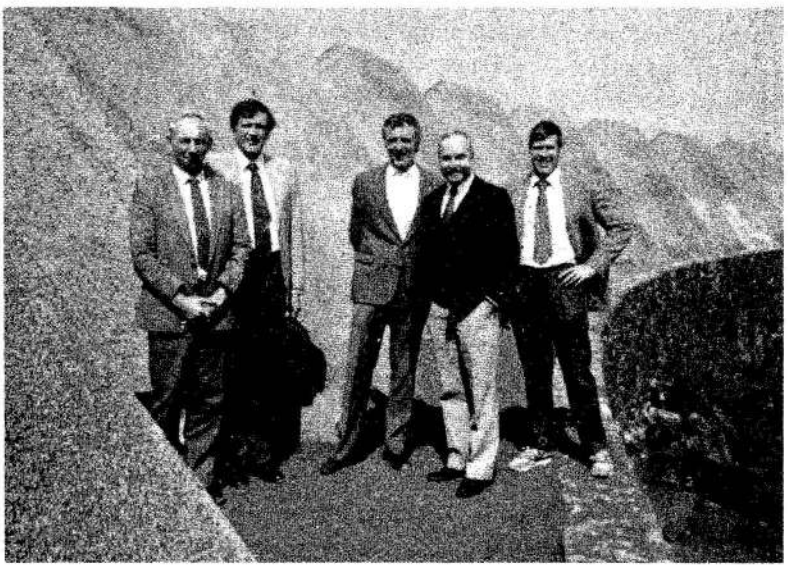
Ivor Grattan-Guinness, *¿Qué es y qué debería ser el cálculo?* 363

autores 389

información para autores 391

El *II Coloquio Internacional de Filosofía e Historia de las Matemáticas* se llevó a cabo en el auditorio del Instituto de Investigaciones Bibliográficas de la Universidad Nacional Autónoma de México (Ciudad de México) del día 10 al 13 de diciembre de 1990. En esta ocasión contamos con la presencia de Joseph W. Dauben (CUNY, USA), Craig Fraser (University of Toronto, Canada), Ivor Grattan-Guinness (Middlesex Polytechnic, Gran Bretaña), Wilbur Knoor (Stanford University, USA) y Janis Langins (University of Toronto, Canada).

La totalidad de las ponencias invitadas serán publicadas en este número de *Mathesis* y en el subsiguiente. La traducción del inglés al español se hizo en Ediciones Técnico Científicas SA de CV, y ésta ha sido revisada en su totalidad por Rafael Martínez-E y Julio César Guevara.



Izquierda a derecha: ***Ivor Grattan-Guinness, Janis Langins, Craig Fraser, Joseph Dauben, Wilbur Knoor.***

INAUGURACION

II Coloquio Internacional de Filosofía e Historia de las Matemáticas

SR. RECTOR
FUNCIONARIOS UNIVERSITARIOS
CONFERENCISTAS INVITADOS
COLEGAS

¿Por qué debemos organizar y apoyar este tipo de eventos y publicaciones donde se discute y se divulga la filosofía e historia de las matemáticas? A tal pregunta respondemos simple, directa y concretamente. Además del interés intrínseco que tienen ambas disciplinas y que, como cualquiera otras ramas del conocimiento, deben ser analizadas con seriedad y honestidad, el estudio de tales materias proporciona un puente - ancho y seguro- que permite romper el muro entre las ciencias y las humanidades. Ruptura que, en esta universidad en particular, no es únicamente intelectual, sino también geográfica.

Los editores y organizadores nos hemos propuesto romper con este distanciamiento a muy diversos, aunque no necesariamente ajenos, niveles. *Mathesis* ha sido un medio que ha permitido a diversos investigadores nacionales y extranjeros presentar sus resultados de investigación inéditos más relevantes. Pero, al ser conscientes de lo limitado de los recursos humanos con los que contamos en los diversos países de habla hispana, *Mathesis* se ha fijado como meta la formación de personal especializado en estas disciplinas. Conscientes a la vez del papel "humanizador" de estas ramas del conocimiento dentro del estudio de las ciencias. *Mathesis* también se ha propuesto su desmitificación y divulgación. En concreto, *Mathesis* y el coloquio están visualizados como instrumentos de investigación, docencia, difusión, e incluso como herramientas de recuperación de nuestra propia cultura.

A casi seis años de la publicación del primer fascículo, *Mathesis* presenta los siguientes resultados concretos: el 27% de los ensayos publicados corresponden a artículos de investigación inéditos; el 38% corresponde a trabajos (en la mayoría de los casos traducciones al español de algunos de los ensayos considerados clásicos e innovadores) que apoyan directamente la formación de nuevo personal especializado; el 34% de los trabajos son de naturaleza divulgatoria e informativa. A través de *Mathesis*, que cuenta con un consejo consultivo formado por diecisiete especialistas extranjeros, se han reeditado un total de cuatro libros completos que se encontraban agotados y eran de difícil acceso para la mayoría de los interesados; y, finalmente, se han publicado treinta y ocho reseñas, en su mayoría inéditas.

En las páginas de *Mathesis* se han publicado trabajos originales de profesionales argentinos, británicos, colombianos, costarricenses, canadienses, españoles, franceses y norteamericanos, entre otros. A nivel nacional hemos contado con la colaboración de colegas de la Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV y de la Universidad Autónoma Metropolitana; y, a un nivel aún más local, hemos recibido y publicado contribuciones del personal académico de los institutos de Física, Astronomía, Matemáticas, Investigaciones Filosóficas; de las Facultades de Química, Economía, y, por supuesto de la Facultad de Ciencias, entre otros. La formación del personal académico se ha visto reflejada mediante la publicación de algunas reseñas redactadas por estudiantes, tanto del nivel de licenciatura como del nivel de posgrado. Algunos estudiantes también han colaborado en diversos aspectos de la producción técnica de la revista, otros se encuentran realizando estudios de posgrado en estas disciplinas en el extranjero. Con tres números actualmente en la imprenta y con una reserva de artículos que garantizan el contenido y la publicacion de la revista por lo menos para otros dos años, *Mathesis* entra a la última década del siglo XX con las armas necesarias para enfrentarse a las diversas dificultades que se afrontarán en el nuevo siglo.

El coloquio, por su parte, nos permite entrar en contacto directo con aquellos investigadores que ya han establecido una fuerte reputación internacional a través de la diversidad, solidez y profundidad de su obra. Aquí nos encontramos ante la oportunidad de escuchar de viva voz —y no por medio de los fríos caracteres tipográficos incapaces de responder a nuestras dudas y objeciones— las últimas interpretaciones de los estudios históricos y filosóficos más relevantes. En una época en que difícilmente se ofrecen becas para realizar estudios de posgrado en el extranjero en estas disciplinas, el coloquio permite a docenas de inte-

resados mexicanos el establecer estrechos vínculos con nuestros homólogos de otros países. Ojalá que en un futuro muy cercano sean también los colegas hispanoparlantes quienes nos ofrezcan una muestra de su propio trabajo.

Desearíamos agradecer públicamente los esfuerzos que ha realizado el Sr. Rector, las autoridades de la Dirección General de Asuntos del Personal Académico y de la Facultad de Ciencias para que este evento pudiera llevarse acabo. En propias palabras del Sr. Presidente de la República Mexicana, Lic. Carlos Salinas de Gortari, este proyecto global de apoyo a la investigación y a la docencia, ha sido posible gracias a la tenacidad, empuje e, incluso, agresividad del Sr. Rector.

Finalmente, pero no por eso menos importante, desearíamos agradecer a nuestros conferencistas invitados su asistencia e interés por participar en este coloquio y colaborar en el desenvolvimiento de la filosofía e historia de las matemáticas en nuestro país.

Muchas gracias.
Alejandro R. Garciadiego

El teorema pitagórico y las matemáticas chinas. Comentario de Liu Hui sobre el teorema 勾股 (Gou-Gu) en el capítulo nueve del *Jiu Zhang Suan Shu*

Joseph W. Dauben[1]

Resumen

A continuación se ofrece una discusión preliminar y relativamente breve, de carácter exploratorio, sobre la naturaleza de las primeras matemáticas chinas, en especial de la geometría, consideradas sobre todo a partir de un ejemplo específico: el teorema de Pitágoras, conocido en su versión china con el nombre de teorema Gou-Gu. Además de realizar algunas comparaciones fundamentales con las tradiciones de Occidente, sobre todo con las matemáticas griegas, también se hacen algunas observaciones generales respecto al carácter y desarrollo de la antigua matemática china. Ante todo, ¿por qué se desarrollaron en esa forma y con esos alcances, pero nunca en una forma abstracta ni axiomática como sucedió en Grecia? Muchos estudios han señalado que las respuestas a estas clases de preguntas han de buscarse en los factores socioculturales de China. Algunos son partidarios del enfoque sociológico, recalcando (por ejemplo) que los chinos se ocuparon, por su naturaleza, de problemas prácticos y de sus soluciones. De ahí que no les interesase desarrollar unas matemáticas eminentemente teóricas. Otros han puesto de relieve los factores filosóficos, adoptando otro punto de vista que goza de gran aceptación: el confucionismo no concedía valor alguno al conocimiento teórico, lo cual a su vez obstaculizó el desarrollo de las matemáticas abstractas tal como las cultivó el pueblo griego. Si bien ambos puntos de vista contienen elementos de verdad, y sin duda contribuyen a entender por qué los chinos no desarrollaron un tipo abstracto y deductivo de matemáticas conforme al modelo griego, aquí se ofrece otro enfoque o explicación. En la medida en que el conocimiento se transmite

Mathesis 7 (1991) 279-301

y se registra en el lenguaje, tanto oral como escrito, los factores lógicos y lingüísticos necesariamente intervienen en la explicación del desarrollo de las matemáticas en China.

Jiu Zhang Suan Shu

Uno de los grandes tesoros de las matemáticas chinas es el *Jiu Zhang Suan Shu*, libro que consta de nueve capítulos y de ahí su título: *Nueve capítulos sobre el arte de las matemáticas* (Fig. 1). Tradicionalmente se ha pensado que incluye algunos de los más antiguos resultados matemáticos de la antigüedad china, remontándose por lo menos a 1100 años a. de C. En efecto, algunos han atribuido sus orígenes a uno de los periodos históricos más antiguos de China, cuando los hechos se confunden con el mito. Una tradición afirma que el "Emperador amarillo", Huang Di, quien vivió en el siglo XXVII a. de C. encargó a su ministro Li Shou la tarea de recopilar el Jiu Zhang Suan Shu.[2]

Por desgracia, la versión original de los *Nueve capítulos* ya no existe. Una de las primeras tragedias de la historia intelectual de China ocurrió en el año 213 a. de C., fecha en que el emperador Qin Shi Huang (221-207 a. de C., famoso por su ejército de terracota en Xian Yang) ordenó quemar todos los libros del Imperio. Aunque quizá algunos de los clásicos hayan sido preservados de manera subrepticia, o memorizados y luego transcritos, los textos reconstituidos producidos para sustituir a esos antiguos documentos "perdidos" que contenían seguramente inexactitudes e interpolaciones hechas por quienes los rescataban. Y en el caso del conocimiento matemático, las innovaciones posteriores y las nuevas técnicas pudieron muy bien ser incorporadas como si hubieran sido parte del original.

La historia posterior de los *Nueve capítulos* es tan incierta como sus orígenes. El texto más antiguo que tenemos del *Jiu Zhang Suan Shu* fue recopilado por Zhang Cang en el siglo II a. de C. y revisado unos 100 años después por Geng Shou Chang. Ambos estudiosos vivieron en la dinastía occidental Han (206 a. de C.-24 d. de C.), y ambos fueron ministros imperiales que emprendieron sus reconstrucciones de los *Nueve capítulos* en una época en que se hacían grandes esfuerzos por restaurar los clásicos que se habían perdido.[3]

Cuando Liu Hui de Wei en el periodo de los Tres Reinos (220-280, d. de C.) volvió a editar el *Jiu Zhang Suan Shu*, esta vez con un comentario muy amplio, inició una tradición que fue repetida después de él

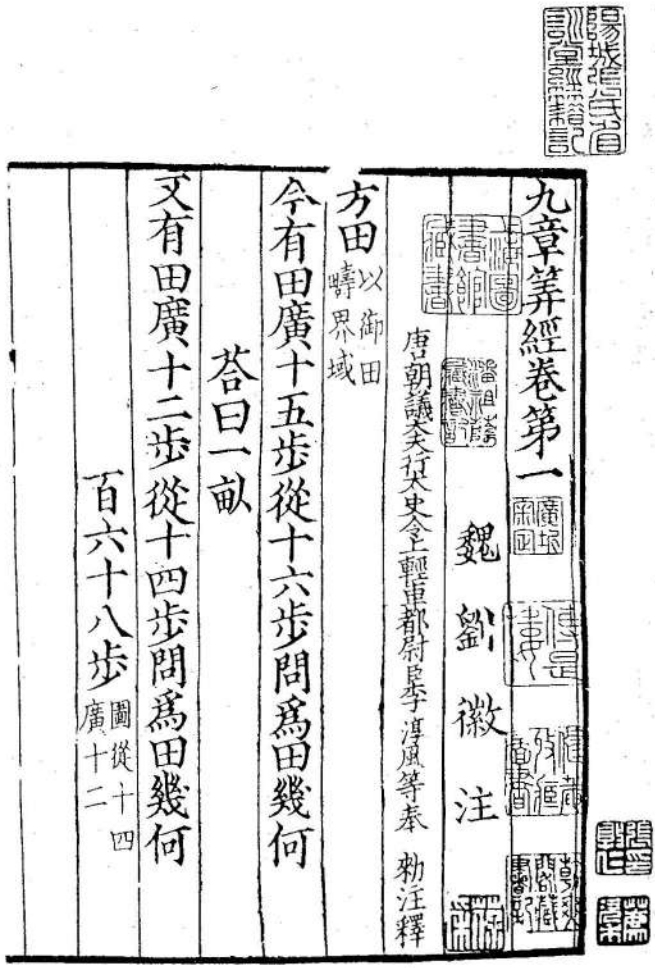

九章算經卷第一
魏劉徽注
唐朝議大夫太史令上輕車都尉臣李淳風等奉 勅注釋
方田 以御田疇界域
今有田廣十五步從十六步問爲田幾何
荅曰一畝
又有田廣十二步從十四步問爲田幾何
百六十八步 圖從十四 廣十二

Figura 1

por Li Chung Feng en la dinastía Tang (618-907, d. de C.), quien también cotejó y comentó el libro.[4]

La edición más antigua de los *Nueve capítulos* que nos ha llegado es la impresión sobre madera de la dinastía Canción del Sur. Sólo los cinco primeros libros (o capítulos) se conservan en esta edición, producida hacia el año 1213 d. de C. y se conoce por el ejemplar que se conserva en la biblioteca de Shanghai. La mayoría de las otras ediciones se basan en la *Biblio-*

teca Completa de las Cuatro Ramas de la Literatura, editada por Dai Zhen de la dinastía Qing, quien la copió de la *Gran Enciclopedia del Periodo del Reino Yong-le de la dinastía Ming* (conocida como la edición Dai). Los comentarios más famosos son los de Liu Hui (263 d. de C.), de Li Chung-feng (656 d. de C.) y los debidos a Zu Chong-zhi (429-500 d. de C.) durante las dinastías Norte y Sur, pero ahora perdidos.[5]

El *Jiu Zhang Suan Shu* dominó la práctica de los administradores chinos durante más de un milenio y, sin embargo, por su orígenes sociales estaba más estrechamente ligado al sistema burocráctico del gobierno; de ahí que se centrase en los problemas que debían resolver los funcionarios públicos.[6] Asimismo ejerció una enorme influencia sobre escritores durante los siglos siguientes, y no resulta una exageración afirmar que prácticamente todas las matemáticas chinas muestran su influencia en cuanto a ideas y terminología.[7]

Matemáticas y los Nueve capítulos

A semejanza de las primeras obras de las antiguas matemáticas de la China en que sin duda se basó el *Jiu Zhang Suan Shu*, éste contiene también una serie de problemas (246 en total) bajo el formato de pregunta y respuesta.[8] Los que vienen en los primeros ocho capítulos tratan de cuestiones prácticas como topografía, problemas de tipo comercial, sociedades y tarifas fiscales. También se refieren a la obtención de raíz cuadrada y raíz cúbica, las propiedades de algunos sólidos (entre ellos el prisma, la pirámide, el cilindro y el cono) y la solución de ecuaciones lineales de dos o más incógnitas (cuya solución llevó a los chinos a introducir por primera vez las cantidades negativas. Si esta parte del libro es realmente original, significaría que los números negativos ya los utilizaban algunos matemáticos chinos en la remota época comprendida entre los años 3000 y 2000 a. de C.).

El último capítulo de *Jiu Zhang Suan Shu* es el más famoso. Es en el capítulo nueve donde se habla del teorema "Gou-Gu", conocido en Occidente con el nombre de teorema de Pitágoras. En él se establece que, para cualquier triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa, un resultado muy conocido en sus términos algebraicos como $a^2 + b^2 = c^2$. Los veinticuatro problemas del capítulo versan primordialmente sobre triángulos rectángulos y soluciones de ecuaciones cuadráticas. Una de éstas es una variante de uno de los problemas matemáticos más antiguos de China:

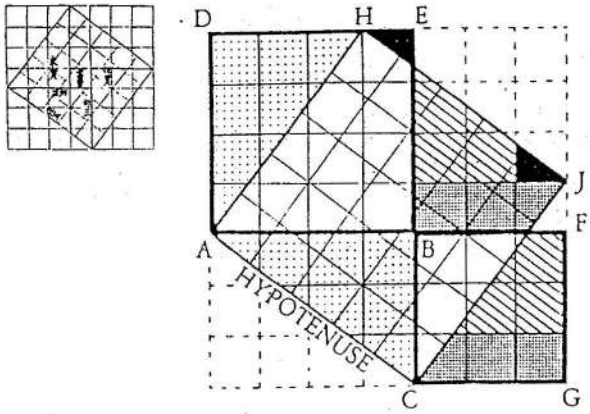


Figura 2

En la mitad de un estanque que tiene diez "chi" de diámetro, una caña o carrizo crece un "chi" sobre la superficie del agua. Cuando se jala hacia la orilla, el carrizo llega exactamente al borde del estanque. ¿Cuál es su longitud?[9]

La solución de este problema es una aplicación directa del teorema Gou-Gu (Fig. 2).

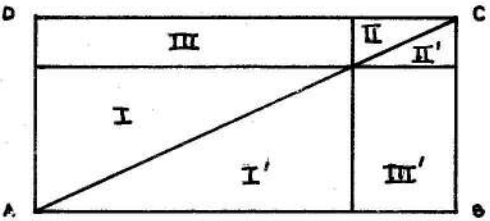
El teorema chino Gou-Gu

Aun antes de que se escribiera el libro *Nueve capítulos*, algunos resultados relativos a los triángulos rectángulos habían sido presentados en una obra anterior de carácter astronómico-matemático, el *Zhou Bi Suan Jing* (El clásico aritmético y las trayectorias circulares). En ambos casos, los textos establecen claramente que para un triángulo recto, si se conocen el cateto más corto y más largo que delimitan el ángulo recto, la suma de sus cuadrados es igual al cuadrado de la hipotenusa.

Si bien se perdieron las explicaciones originales de este descubrimiento, es posible reconstruir a partir de varios libros la línea general de razonamiento que seguramente se empleó. Además del *Comentario sobre el Zhou Bi Suan Jing* de Zhao Shuang, contamos también con las anotaciones de Liu Hui sobre los resultados referentes a triángulos rectángulos en los *Nueve capítulos*. Por ejemplo, al comentar un pasaje

que dice "Combinando cada cuadrado de Gou y Gu, tomando la raíz cuadrada tendremos Xian (la hipotenusa)", Liu Hui explica esto en los siguientes términos:

> El cuadrado Gou es el cuadrado rojo [zhu fang], el cuadrado Gu es el cuadrado azul [qing fang]. Al ponerse piezas dentro y fuera según su tipo se complementarán unas a otras, y entonces el resto (de las piezas) no se moverá. Al formar el cuadrado Xian y tomar la raíz cuadrada se obtiene Xian (la hipotenusa).

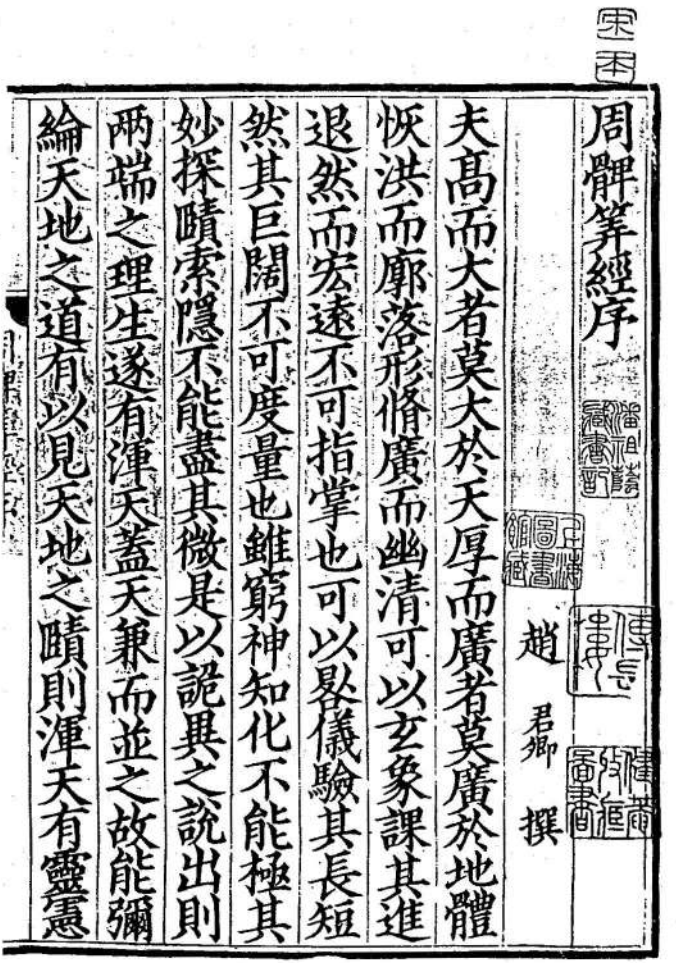


El pasaje que acabamos de transcribir es oscuro y problemático. La referencia a las piezas móviles dentro y fuera se relaciona con un diagrama, el cual se ha perdido, y se sirve del método de "fuera-dentro", que se consideraba un axioma entre los matemáticos de la antigua China. Sin embargo, su fuerza se advierte en el siguiente ejemplo donde los dos triángulos ABC y ACD son iguales:

Las áreas I y I', II y II' son iguales; por tanto, del "principio complementario de fuera-dentro" se deduce que III debe ser igual a III'.[10]

Lo anterior ayuda ahora a explicar el comentario de Liu Hui sobre el teorema Gou-Gu. Ante todo, sus referencias a los cuadrados de colores se parecen a los colores mencionados en los diagramas que ilustran el teorema en el libro *Zhou Bi Suan Jing*. En esta obra, dentro de la "figura Xian" el cuadrado central es amarillo, en tanto que los del cuadrado "Xian" son rojos. Con frecuencia el cuadrado Gou es azul.

Al usar el principio complementario "fuera-dentro" sobre la figura Xian, y siguiendo el comentario de Liu Hui acerca del teorema Gou-Gu, la suma de los cuadrados basados sobre cada cateto del triángulo recto ABC, a saber, los cuadrados ADEB y BFGC, es igual al cuadrado de la hipotenusa (AC), es decir, al cuadrado AHJC. Según el principio de fuera-dentro, si movemos las partes de los dos pequeños cuadrados (ADEB y BFGC) que están en la parte externa del cuadrado grande (AHJC) hacia su interior, podremos ver que llenan exactamente el interior y que las áreas combinadas de los dos pequeños cuadrados son iguales a la del grande. Dado que las áreas son análogas a los cuadrados


周髀算經序

趙君卿撰

夫高而大者莫大於天厚而廣者莫廣於地體恢洪而廓落形脩廣而幽清可以玄象課其進退然而宏遠不可指掌也可以晷儀驗其長短然其巨闊不可度量也雖窮神知化不能極其妙探賾索隱不能盡其微是以詭異之說出則兩端之理生遂有渾天蓋天兼而並之故能彌綸天地之道有以見天地之賾則渾天有靈憲

Figura 3

de los catetos del triángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

La primera obra que contenía la idea de demostrar el teorema del triángulo rectángulo mediante una adecuada reordenación de las áreas ya ha sido mencionada aquí: *El clásico aritmético del Gnomon y las trayectorias circulares del cielo*, cuya redacción algunos estudiosos hacen remontar al año 1100 a. de C. (Fig. 3). Sin embargo, la evidencia

astronómica sugiere que la mayor parte del material corresponde a una época mucho más cercana, posiblemente a la época de Confucio hacia el siglo VI a. de C.[11] El caso específico del teorema del triángulo recto se da en términos del triángulo de lados 3-4-5 y el teorema se explica en términos de "acumular rectángulos".

Matemáticas griegas: un contraste profundo entre forma y función

Compare estos desarrollos del teorema Gou-Gu en la tradición matemática de la China con lo que se encuentra en los *Elementos* de Euclides. La diferencia más notable es sin duda el marco axiomático de la obra de Euclides y su carácter abstracto, formal.

El libro I de los *Elementos* comienza con definiciones cuidadosas e introduce luego axiomas y finalmente teoremas con pruebas que están interconectadas y, en general, basadas una en otra de manera progresiva. Por otra parte, el libro nueve de los *Jiu Zhang Suan Shu*, comienza inmediatamente con un problema práctico concreto y no pierde tiempo en ofrecer un modelo de solución.

Pero existe otra diferencia menos obvia entre las dos obras. Pregúntele a cualquiera de qué tratan los elementos de Euclides y la respuesta será "de la geometría". Y sin embargo, la palabra *geometría* no aparece en todo el libro de Euclides, hecho curioso y a la vez revelador (por los motivos que luego aclararemos).

Más aún, a diferencia de la demostración china del teorema del triángulo rectángulo, que requiere una reordenación de las áreas para demostrar su equivalencia, la famosa prueba euclidiana del teorema de Pitágoras, Proposición I, 47, no se basa en un simple cambio de áreas, moviendo a a b y c a d, sino depende de un elegante argumento que exige una rigurosa secuencia de teoremas acerca de triángulos semejantes y de áreas equivalentes. Lo que Euclides logra reflejar es un enfoque enteramente diferente de las matemáticas respecto de la más simple y concreta versión china.

Pero las definiciones de Euclides indican orígenes más primitivos que nos acercan mucho más a un punto de vista recogido en el libro *Jiu Zhang Suan Shu*. Consideremos, por ejemplo, la definición euclidiana de la línea recta: "aquella que yace uniformemente con los puntos sobre sí misma" (la conocida definición "la distancia más corta entre dos puntos" es más reciente y es otra historia). Si nos imaginamos una cuerda que está siendo estirada entre dos puntos, sostenida por agrimensores que tal vez quieran medir distancias o terrenos, los puntos de la

cuerda que "yacen uniformemente" reflejan de inmediato la clase de experiencia concreta a partir de la cual los griegos empezaron a reflexionar sobre las matemáticas, alcanzando con el tiempo niveles de abstracción que fueron eliminando cualquier vestigio de los orígenes humildes y prácticos de lo que más tarde fue presentado (y reverenciado) como el logro más excelso de la axiomática y la abstracción características de las demostraciones matemáticas.

Pero entre todas las líneas de la geometría griega, la *hipotenusa* es la más interesante de las líneas rectas (al menos por su nombre). Es un término que deriva de la voz griega "teinousa", que significa "estirado". Platón, en su diálogo *Menón* $48E^8$-$85A^2$ utiliza la palabra *teinousa* para indicar la línea "estirada a lo largo" entre las esquinas opuestas del cuadrado, es decir, la diagonal.

La hipotenusa es, pues, la línea que está "estirada sobre o a lo largo". Platón en Parménides" 137E define la recta como "aquella línea cuyo medio cubre los extremos". Herón la define como la línea "estirada al máximo entre ambos extremos". Todos los ejemplos anteriores sirven para indicar que los orígenes prácticos del teorema pitagórico se remontan a la agrimensura y a la antigua tradición del estiramiento de cuerdas.

Por supuesto, esto se basaba en el conocimiento que los griegos tenían incluso de la antigua geometría de los egipcios y con los famosos *harpedonaptai*, los estiradores egipcios de cuerdas. Pero los egipcios no eran los únicos en utilizar esta técnica. Los acadios, asirios, babilonios, hebreos, todos ellos realizaban mediciones y levantamientos topográficos básicos con ayuda de cuerdas y también se servían de estiradores de cuerdas que actuaban como hábiles agrimensores. Por ejemplo, Isaías (35, 17) describe el terreno "dividido por la línea" y Amós (7, 17) habla de la "tierra distribuida por la línea".

Siguiendo la misma línea de razonamiento, la geometría más antigua de los hebreos, descrita por un comentador como una especie de manual práctico para los estiradores de cuerdas, es la *Mishna-ha-Midot* (Teoría de medidas). También en esta obra la palabra "cuerda" o "soga" se emplea para indicar la diagonal de un cuadrado, o la hipotenusa del triángulo rectángulo. De manera análoga, en India el *Apastamba Sulva-Sutra* del siglo V-IV a. de C. describe triángulos rectángulos mediante cuerdas estiradas y da, a manera de ejemplos, las tripletas 5-12-13, 8-15-17 e incluso 12-35-37.

Todas estas experiencias, diferentes y semejantes a la vez, con el uso rutinario de la geometría se reflejan directamente en el lenguaje.

Aunque originalmente estaba en manos de los que trabajaban o medían la tierra, el conocimiento empírico con los años fue pasando al ámbito más sistemático y eventualmente más abstracto de los matemáticos, quienes a su vez ampliaron y generalizaron sus aplicaciones. Aun así, la mayoría de las veces los términos de que se sirvieron eran las palabras utilizadas por personas con una mentalidad más práctica.

Un último ejemplo bastará para poner todo esto dentro de una perspectiva moderna, ya que la palabra que utilizamos hoy en matemáticas para designar "aquello que yace uniformemente sobre sí mismo", es la palabra "línea", la cual proviene del vocablo latino "linea". En sus orígenes *linea* literalmente significó "hebra de lino", nominativo tomado de *lineus*, interpretándose como "de lino" y derivada de la palabra latina para lino, *linum*. Todo esto guarda una relación directa con otra palabra muy conocida en inglés, linen (en español, lino), lo cual remite a la fibra con la cual se hacen telas finas.

La geometría china y los estiradores de cuerdas

La geometría china, y ahora esto no causará sorpresa, también parece tener sus orígenes en una tradición de estiramiento de cuerdas en el ámbito de la agrimensura. Y una vez más este origen se refleja directamente en la nomenclatura matemática de una manera natural. La palabra china "Gou" significa pierna, "Gu" significa muslo y "Xian", 弦,

(carácter con que se designa la hipotenusa), significa cuerda de laúd.[12]

Así pues, la geometría china, especialmente el teorema Gou-Gu, descansa sobre una tradición práctica de agrimensura y sobre la manipulación directa de elementos físicos o visualizables con los cuales se "demuestran sus resultados". Esto corresponde en gran medida al enfoque adoptado por los primeros matemáticos occidentales, los egipcios y los babilonios, respecto de similares problemas geométricos de agrimensura.

Como ha demostrado Lam Lay-Yong en su análisis de las reglas prácticas de la aritmética desarrolladas por los chinos en la agrimensura:

> La forma de todas las cosas, cuando se divide en sus secciones apropiadas, dará origen finalmente a las formas de las figuras básicas del campo.[13]

Las matemáticas chinas se asemejan a las de Occidente en tener sus raíces en los problemas prácticos de la agricultura y la tierra. Pero además

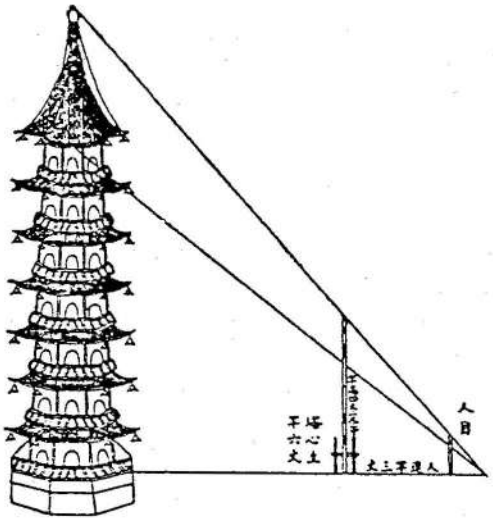


Figura 4

de descubrir resultados matemáticos especiales, sobre todo relaciones muy generales entre las entidades geométricas (como las propiedades del triángulo rectángulo), ¿qué puede decirse de su interés por las "pruebas" u otras formas de demostración? Una vez más el estudio del profesor Lam sobre *The Alpha and Omega of a Selection on the Applications of Arithmetical Methods* (Principio y fin de una selección de las aplicaciones de los métodos aritméticos) resulta revelador en extremo:

> Para resolver un problema es preciso escoger un método. El método ha de ser adecuado para el problema. Con objeto de entender el método, éste ha de ilustrarse con un ejemplo.[14]

Esta no es la manera en que trabajaba Euclides. Los ejemplos concretos e individuales del teorema de Pitágoras no bastarían para probar, en forma general, abstracta y universal, un resultado como la versión que se muestra en Euclides, I, 47. Pero la demostración mediante ejemplos era la forma que utilizaban los chinos. Las generalizaciones plausibles se hacían a partir de situaciones concretas. Por ello encontramos muchos problemas y ejemplos fascinantes en libros chinos de matemáticas, hechos con la finalidad de demostrar una amplia variedad de técnicas. En la medición de la altura de las pagodas, de las distancias de las islas y de la pro-

fundidad de los pozos, la semejanza de los triángulos se usa como un método general, lo mismo que el método de doble diferencia (entre otros) para resolver una multitud de problemas geométricos (Fig. 4).[15]

Diferencias entre el espíritu matemático de los chinos y el de los griegos

Algunas veces uno se pregunta ¿por qué los chinos no llegaron a desarrollar una matemática axiomática como la de Euclides? ¿Por qué no formularon una prueba más abstracta, por ejemplo, del teorema Gou-Gu? Pero seguramente éstas son preguntas equivocadas. La verdadera cuestión es la siguiente: ¿por qué se apartaron los griegos de prácticamente todas las otras culturas en este aspecto, es decir en su preocupación por las pruebas axiomáticas y deductivas? Claro está que éste es un problema muy diferente a la determinación del origen y la naturaleza de las matemáticas chinas.

No obstante, en cierto modo la demostración china del teorema Gou-Gu es general; la reordenación (rearreglo) de las áreas es válida para cualquier triángulo rectángulo y no sólo para los triángulos de lados enteros como los de los egipcios y babilonios. Y al desarrollar sus numerosas aplicaciones del teorema Gou-Gu, es evidente que los chinos entendieron que era válido para cualquier triángulo rectángulo y encontraron tripletas mucho más generales de números no enteros que satisfacían el teorema Gou-Gu. Entre ellas tenemos 8, 91/6, 121/6 y 10, 491/2, 501/2.

Se ha dicho que la geometría no se desarrolló en China más allá de lo que se muestra con el comentario de Liu Hiu porque era suficientemente amplia como para satisfacer las necesidades de los chinos. Después de todo, ¿qué finalidad real y utilitaria es satisfecha mediante las pruebas matemáticas abstractas?[16] Otro argumento estrechamente relacionado con el anterior sugiere que las matemáticas chinas, con su gran interés por los problemas prácticos, no buscaba las generalizaciones abstractas. Aunque a primera vista esto puede haber sido el caso, empiezan a surgir dudas en cuanto examinamos más detenidamente la situación. Por ejemplo, si analizamos el método que Liu Hui sigue en su comentario sobre la obra *Nueve capítulos*, descubrimos que tiene mucho cuidado en explicar cada fórmula dada para las áreas y volúmenes, y que tales "explicaciones" son en gran medida muy semejantes a pruebas básicas sencilllas.

Aquí podemos aprender mucho del estudio de D. B. Wagner sobre el comentario que Liu Hui hace respecto al volumen de las pirámides. Al inicio del comentario describe su método en un corto prefacio:

> Al organizar adecuadamente los conceptos y proposiciones por medio del análisis analógico y deductivo, podían ser colocadas en su lugar apropiado. Por tanto, las ramas que se diversifican al crecer pero que comparten el tronco principal de un árbol se considera que provienen de un mismo origen.
> Más aún, si se analiza una teoría por proposición y se ilustra una estructura con figuras geométricas, se consigue entender el panorama completo de la teoría mediante algunos principios simples y también el todo puede captarse pero no sin antes haber penetrado en ella. Así, el lector comprenderá la mayor parte de las ideas.[17]

El carácter 主 (Zhu) que indica proposición o juicio tiene estrechas afinidades con los *Debates de Mo-Zi*, antigua obra acerca de la lógica china. Aquí "Zhu" tiene un significado cercano al de "proposición". Puesto que Liu Hui menciona esta obra en su comentario, sin duda estaba familiarizado con las ideas expuestas en ella y tal vez también con su terminología e ideas metodológicas. Especialmente a la luz de las ideas de Mo-Zi consideremos cómo Liu Hui deduce el volumen de una pirámide:

> La proposición procede de causas directas; se desarrolla con las leyes generales o teoría; y se manipula al aplicarla a la misma clase de [cosas] ... Si estas tres condiciones se cumplen, entonces es suficiente para asentar la proposición ...[18]

En una palabra, Liu Hui *parece* manifestar interés por un método sistemático general para dar validez a sus "demostraciones" geométricas. No se trata sencillamente de unos cuantos ejemplos que dan origen a generalizaciones, sino de la comprensión de que algunos principios más profundos sirven para establecer las "causas" relacionadas con las "leyes" que subyacen bajo las "proposiciones".

Valores chinos de π

Más aún, las afirmaciones referentes a un excesivo interés práctico de los chinos por sólo problemas concretos con aplicaciones útiles no son válidas en el caso de la aproximación meticulosa de Liu Hui al valor numérico de π. Este ejemplo, de hecho, muestra con claridad cómo los chinos

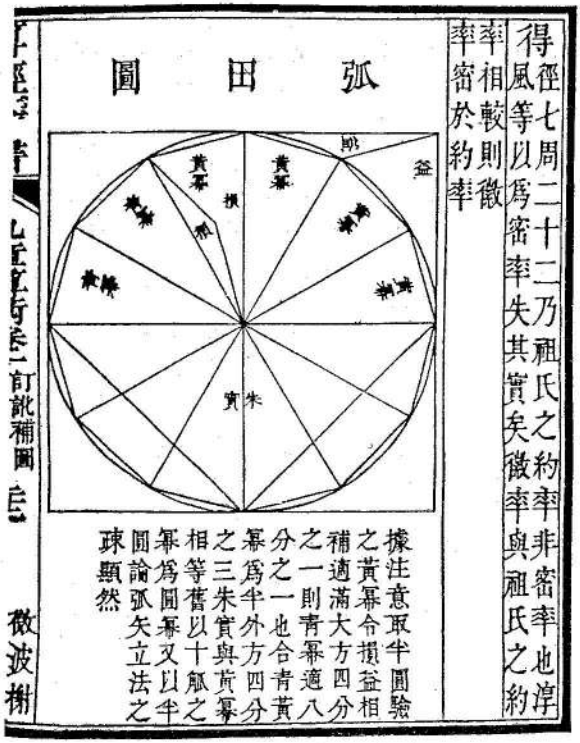


Figura 5

lograron superar a los griegos aun en exactitud. Y sin embargo, se trata de asuntos que no tienen la menor utilidad práctica.

La práctica común en China antes de la dinastía Han (206 a. de C.-220 d. de C.) era tomar como tres la razón de *pi* = *c*/*d*. El primer ejemplo de una mejor cifra que este resultado tan primitivo (pero muy común en la mayor parte de las culturas antiguas que mostraban un interés rudimentario por la geometría) lo encontramos en un cilindro patrón de bronce hecho por orden oficial a principios del siglo I, el cual da un valor de 3.1547.

En la época de Liu Hiu se había logrado un resultado mejor y más refinado, el cual resulta sorprendentemente familiar para el que conozca a Arquímedes, porque en los *Nueve capítulos* se utilizan polígonos regulares inscritos y con ellos se aproxima el valor de *pi* (como lo hiciera Arquímedes) (Fig. 5). Esto se describe de la manera siguiente en el comentario hecho por Liu Hui a dicha obra:

> Cuanto más finos sean los segmentos que cortamos, menor será la pérdida en el cálculo de la superficie del círculo. El área exacta se obtiene cuando los segmentos cortados llegan a ser infinitesimales.[19]

Liu Hui primero obtuvo un valor para π utilizando un polígono de 192 lados, el cual le dio un valor de 3.14 64/625 (aproximadamente 3.141024). Después procedió a considerar un polígono inscrito de 3072 lados. Este cálculo extraordinario le dio un valor de 3927/1250 = 3.1416... para *pi*.

Sin duda, Liu Hui constituye un ejemplo muy revelador en contra de la idea de que los antiguos matemáticos chinos se concentraban sólo en lo que tenía un valor práctico para ellos. Es obvio que eran capaces de ir mucho más allá de lo que era práctico o físicamente posible. Por lo visto, Liu Hui mostró interés en todo cuanto contribuyera a lograr una mayor precisión o a descubrir los nexos sistemáticos entre las proposiciones y sus demostraciones.

No obstante, después de su muerte, la geometría china no parece haber logrado mayores avances. Si bien algunos autores señalan que ello obedeció primordialmente a la orientación práctica de las antiguas matemáticas de ese país, tal vez su notable éxito y su amplia generalidad hayan sido la causa del estancamiento y de que no se hayan hecho más progresos. Como observa atinadamente D. B.Wagner:

> El marco conceptual de Liu Hui era adecuado, por ejemplo, para ocuparse de una gama mucho más extensa de sólidos geométricos que los que estudia en su comentario. Si hubiera sentido la necesidad de agotar las posibilidades de su método, seguramente habría hecho una aportación mucho mayor a la tradición matemática. Podemos advertir aquí la doble influencia del enorme prestigio de Chiu-chang shan-shu: fue a la vez un reto y una inspiración; sólo que a menudo resultó también una especie de camisa de fuerza que confinó los intereses de los matemáticos a determinados problemas específicos.[20]

A semejanza de Euclides, Liu Hui sintetizó su arte en una forma tan adecuada que sus sucesores no sintieron la necesidad de aportar mejoras o bien pensaron que ya no había más por hacer.

La inconmensurabilidad y las matemáticas chinas

Sin embargo, las antiguas matemáticas de los chinos presentan otro aspecto que resulta sorprendente y que, tras detenida reflexión, las distin-

gue de las griegas e incluso las separa de algunos de los principios más fundamentales de las matemáticas modernas. Que yo sepa, en ninguno de los libros de sus matemáticas clásicas se observa interés por el carácter "irracional" de la diagonal del cuadrado. A pesar de haberse explorado ciertas aproximaciones a su valor, ni en los textos matemáticos astronómicos de los chinos aparece un análisis por *antifairesis* o el conocido análisis de par-impar que se encuentra en la famosa demostración de Aristóteles sobre la "inconmensurabilidad" de $\sqrt{2}$.

En efecto, en el pensamiento chino falta toda una clase de argumentos, y esa carencia se refleja en el lenguaje y en la lógica por igual. Lo que no se encuentra en ningún razonamiento chino relacionado con las matemáticas (y tampoco en cuestiones filosóficas o lógicas) son los argumentos que se basan en un razonamiento contrario a los hechos.

Uno de los métodos más potentes de prueba en las matemáticas del mundo occidental se funda en los argumentos de *reductio ad absurdum* (reducción al absurdo). En ellos se comienza por hacer una suposición, la cual se considera verdadera para desarrollar el argumento, y luego se prueba cómo ésta lleva a una contradicción. La contradicción a su vez establece el hecho de que la suposición inicial era en realidad falsa y contradictoria del hecho. Este método no nos causa sorpresa, pero sin duda hubiera sorprendido y parecido poco natural a Liu Hui.

Investigación psicolingüística reciente

El trabajo reciente de Alfred Bloom (en Swarthmore) sugiere lo siguiente:

> Postular premisas falsas con el único propósito de extraer implicaciones o deducciones sobre lo que sucedería si fuesen verdaderas es un acto psicolingüístico. De ahí que el desarrollo de una destreza para su uso dependa principalmente de la naturaleza de los incentivos que ofrece el lenguaje.

Las construcciones contrarias a los hechos están profundamente arraigadas en inglés y en los lenguajes indoeuropeos en general.

Por otra parte, en China no sucede así. Por ejemplo, en una discusión con un nativo de ese país acerca de un canguro como concepto, tema abordado para dilucidar la naturaleza del argumento, la respuesta que recibió Bloom fue la siguiente:

Tai-Shu: "¿Qué quiere decir usted con concepto de canguro? O bien está hablando de un solo canguro o de todos ellos... o es que hay otra posibilidad?"

En realidad hay dos problemas en este caso:

1. Entificación o caracterización de lo que constituye el ente (entification, en inglés).
2. Construcciones opuestas a los hechos

Entificación es, básicamente, otro término con que se designa la categorización, la cual involucra la abstracción de conceptos teóricos a partir de propiedades o acciones específicas. En español, los sufijos con que se realiza este proceso son -ismo, -ogia, -idad, -ura, etc. En español es bastante fácil pasar de una cualidad concreta y objetiva de un objeto (un objeto "blando", por ejemplo) a un concepto general de esa cualidad: "blandura". De manera análoga, se "entifican" fácilmente conceptos, como ya se señaló, generalizando de blando a blandura, de moderno a modernizar, de normal a normalizar, de Marx a marxismo, de sociedad a sociología, de apéndice a apendicititis. Pero no hay una forma fácil de hacer esto en el chino, de pasar de lo blanco al concepto de blancura, de probable al concepto de probabilidad.

Sin embargo, esta generalización admite algunas excepciones muy reveladoras en el sentido de que la entificación en chino no es fácil. El uso moderno del chino en Taiwán y en Hong Kong empieza a introducir conceptos entificados e incluso en la antigüedad Kung-sun Lung-tzu, un filósofo del siglo IV a. de C., discute conceptos como blancura y otros. Sin embargo, su editor/comentador Chan Wing-tsit (1963) observa que no "tuvo influencia alguna" después de su época. En este caso la excepción sirve para confirmar la regla.

La importancia de la entificación en matemáticas es considerable. Definir un "punto", por ejemplo, como "aquello que carece de dimensión" o de una "línea" como "anchura sin longitud" es hablar de cosas ideales. Pero éstos de hecho no existen en el mundo concreto y, por lo mismo no tienen sentido desde el punto de vista de los chinos.

En general, lo abstracto cae dentro de esta categoría. Por tanto no debe extrañarnos que ningún matemático chino, por mucho dominio que haya alcanzado en el manejo de las herramientas de la geometría y del cálculo, haya pensado alguna vez en definir los puntos, las líneas o el espacio como lo hizo Euclides. Pero en el manejo de situaciones y procedimientos reales no se presentan tales dificultades. Así, Liu Hui desarrolló el método

de la doble diferencia alcanzando un alto grado de sofisticación, en parte porque se refiere a entidades concretas y específicas.

Otra manera de abordar esta cuestión de la abstracción y entificación es el empleo de modelos. La investigación realizada por Bloom ha descubierto que los sujetos chinos llaman "moverse en círculos" al recurso a abstracciones o modelos. De hecho:

> En chino, cuando cada evento se expresa individualmente en forma de sujeto/predicado, aun en recuentos complejos de relaciones entre eventos, los componentes individuales parecen conservar su identidad y, por tanto, obligan al autor a mantenerse en un contacto más estrecho con la secuencia lógica, temporal o causal en que realmente se encuentran.

El término occidental "teórico" es un ejemplo muy ilustrativo (li lun shang). En Taiwán, el concepto se refiere a los contenidos de una teoría específica. Hablar de un "ejemplo teórico" significa, literalmente, dar un ejemplo concreto de un hecho tomado del mundo real de los fenómenos científicos que, en su momento, apoya o prueba una teoría. La noción de "posibilidad teórica", donde la posibilidad en cuestión tal vez no tenga fundamento alguno en la realidad, no tiene ningún sentido desde el punto de vista de los chinos. Examinemos ahora una situación contraria a los hechos. Supóngase que x es verdadera aun cuando no lo sea. Uno de los ejemplos clásicos de tal tipo de argumento, tomado de las matemáticas de los antiguos griegos, es la prueba que presenta Aristóteles para demostrar la inconmensurabilidad de la diagonal de un cuadrado; en términos modernos, que $\sqrt{2}$ es irracional.

El descubrimiento de las magnitudes incomensurables por los pitagóricos

Aristóteles menciona la doctrina pitagórica de que todas las cosas son números y supone que esta opinión se originó indudablemente en varias clases de observación empírica.[21] Por ejemplo, en términos de la teoría de Pitágoras sobre la música, el estudio de la armonía había revelado las impresionantes evidencias matemáticas de la proporcionalidad. Cuando se compararon las razones de longitudes de cuerdas o de columnas de flautas, las armonías producidas por longitudes diferentes pero proporcionalmente similares, resultaron iguales. Los pitagóricos sabían asimismo que cualquier triángulo con lados de longitud 3, 4, 5 sin importar las unidades utilizadas es un triángulo *recto*. También esto venía a confirmar su creen-

nomía pitagórica vinculaba esas armonías terrestres con los movimientos de los planetas, donde la armonía numérica (o regularidad cíclica de las revoluciones diarias, mensuales o anuales) era tan impresionante como las armonías musicales que, según se creía, los planetas creaban al recorrer sus ciclos eternos. Todos estos elementos inmutables hacían verosímil la doctrina pitagórica de que los números (los números enteros) y sus razones eran la causa de la estructura oculta de toda la naturaleza.

Esta especie de aritmología alcanzó su culminación en la tentativa de los pitagóricos por asociar los números a todas las cosas y determinar las propiedades, razones y relaciones internas entre los mismos números. La fecha exacta en que se descubrieron las magnitudes inconmensurables no es importante en este momento. Lo que nos concierne es el descubrimiento y sus efectos posteriores. De mayor interés, sin embargo, es la versión de la prueba que Aristóteles menciona y que se sirve de un argumento basado en la negación de lo verdadero.

Supóngase que $\sqrt{2} = a/b$. Supóngase además que a/b ha sido reducida a sus términos mínimos, lo cual significa que a y b no tienen factores comunes. Después, elevando al cuadrado $2 = a^2/b^2$ y $2b^2 = a^2$. Puesto que $2b^2$ es par (contiene un factor de 2), se deduce que a^2 también ha de serlo, lo cual a su vez significa que a debe ser par (pues si fuera non, a^2 también sería non). Si a es par, entonces $a = 2a'$ (donde a' es $1/2a$). Ahora es posible reescribir $2b^2 = a^2$ como $2b^2 = (2a')^2$, es decir $2b^2 = 4a'^2$. Si se divide entre 2, entonces $b^2 = 2a'^2$. Puesto que $2a'^2$ es par, b^2 también ha de serlo y, en consecuencia, b también será par. Pero según este razonamiento, tanto a como b son pares, lo cual viola la suposición inicial de que a y b no tienen factores en común. Aquí hemos llegado a una contradicción, y ello prueba que la suposición inicial era falsa y que $\sqrt{2} \neq a/b$.

Desde el punto de vista filosófico, el descubrimiento de que $\sqrt{2}$ es irracional habría significado una grave crisis para los pitagóricos. Nos hallamos ante un objeto matemático bien definido, a saber la diagonal del cuadrado, que violaba la suposición más fundamental de los pitagóricos de que todo puede medirse mediante números enteros o expresarse en forma de razones de números como a/b. Habiendo sido tentados por la seductora armonía de la generalización, algunos pitagóricos llevaron demasiado lejos su principio de que todas las cosas eran números. La generalización total era inadmisible, y ello constituyó un serio golpe para el pensamiento pitagórico, si no es que para todas las matemáticas griegas. En efecto, la glosa al libro X de los *Elementos* de Euclides refleja la tras-

cendencia del descubrimiento de las magnitudes inconmensurables en la conocida fábula del naufragio y del ahogamiento de Hipaso:

> Es bien sabido que el hombre (Hipaso) que por primera vez dio a conocer la teoría de los irracionales pereció en un naufragio, a fin de que nunca se conociera lo inexpresable e inimaginable ... y por eso el hombre culpable que fortuitamente estuvo en contacto y reveló este aspecto de los seres vivos, fue llevado a un lugar donde empezó su camino y donde por siempre será golpeado por las olas.[22]

Sin embargo, lo que aquí queremos subrayar, particularmente teniendo presente el ejemplo de las matemáticas de los chinos y el problema del razonamiento donde se supone lo contrario a los hechos, son los adjetivos "inexpresable" e "inimaginable". Nos resulta difícil, si no es que imposible, entender lo arduo que debió haber sido imaginar algo que uno no puede determinar ni nombrar (lo inconcebible) y esto es precisamente el nombre dado a la diagonal: αλογον (alogon). Esta designación refleja el doble sentido del vocablo *logos* en tanto que palabra, lo "expresable" o "mencionable", y ahora lo irracional, el *alogon*, lo "inexpresable", lo "inmencionable". Dentro de este contexto resulta fácil entender el comentario siguiente: "Tal era el miedo que tenían estos hombres a la teoría de los irracionales", porque era, literalmente, el descubrimiento de lo "impensable", lo "inexpresable", lo "inmencionable".

Al tratar de ocuparse de magnitudes incomensurables, conceptos "desconocidos y problemáticos" según Morris Kline, resultaba de suma importancia el formular axiomas y deducir consecuencias paso a paso de modo que no se cometa error alguno.[23] Esta preocupación refleja de hecho el interés de Platón por la certidumbre dialéctica de las matemáticas y fue preconizada en la gran síntesis de Euclides, quien trató de conferirle a la geometría todo el rigor del razonamiento axiomático. Fue con este espíritu que Eudoxo emprendió la tarea de sentar las bases lógicas exactas de las razones incomensurables y, al hacerlo, dio un gran impulso a la "revolución" lógica, axiomática y *a priori*, identificada por Kant como la transformación medular que los griegos infligieron a las matemáticas.

El carácter concreto de las matemáticas chinas

En vez de ocuparse de problemas abstractos y lógicos,[24] las matemáticas de los chinos, lo mismo que su ciencia, cultivó una rica tradición de observación empírica. Pero la suya no era una orientación teórica que

tratara de abandonar el mundo de la experiencia física y de las aplicaciones físicas, para luego construir y probar modelos puramente teóricos o marcos de referencia explicativos.

Conclusión

En un nivel muy básico, el de la conceptualización y construcción lingüística, los chinos no se sentían inclinados a desarrollar las nociones abstractas como un fin en sí mismo, en especial cuando éstas podrían originar situaciones contrarias a los hechos o cuando su estatus era sólo teórico, sin que correspondieran a algo susceptible de ser confirmado por la evidencia empírica.

Como dijera el filósofo confucionista del siglo III a. de C. Xun-Zi acerca de la obra de Kung-sun Lung-tsu:

> No hay razón por la cual no deban investigarse los problemas acerca de "dureza" y "blancura", "semejanza" y "no semejanza", "grosor" y "no grosor", pero el hombre superior no los discute; se detiene donde el discurso deja de ser práctico y útil.

Sin embargo, tales límites, como se advierte en los resultados del comentario de Liu Hui sobre los *Nueve capítulos*, no excluyen la posibilidad de que los chinos descubrieran y utilizaran resultados importantes y extraordinarios. En particular, en el campo de la geometría práctica idearon las técnicas necesarias para resolver problemas cuantitativos en formas eficientes y, en ocasiones, muy sofisticadas.

Notas

1. Joseph W. Dauben pasó la primavera de 1986 en China como uno de los nueve estadounidenses escogidos por la U.S. National Academy of Sciences para que representaran a ese país, según lo establecido en el programa de intercambio de científicos visitantes patrocinado por la Academia Sinica de la República Popular de China. El material expuesto en esta conferencia se basa en la investigación que llevó a cabo durante su estancia en ese país, sobre todo en el Instituto de Historia de la Ciencia Natural de la Academia China de Ciencias en Beijing.

2. Véase el ya pasado de moda, pero aun así uno de los primeros estudios de las mátemáticas chinas, "Jottings on the Science of Chinese Arithmetic" de Alexander Wylie, en *Shangae Almanac for 1853 and Miscellany* (Shanghai, 1853). También hay un artículo muy antiguo que vale la pena consultar en K. L. Biernartzki, "Die Arithmetik der Chinesen", *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 52 (1856) 59-44.

3. J. Legge, *The Chinese Classics*. Oxford, 1893, Vol. I, p. 4.

4. A Liu Hui se le conoce también por otro tratado importante, el "Manual de la isla en el mar" (porque el primer problema es calcular la altura y la distancia de una isla en el mar). Este "manual" contiene apenas nueve problemas y originalmente fue concebido como un apéndice de la edición de los *Nueve capítulos* de Liu Hui. Véase a Li y Du, p. 75.

5. La fecha de la edición y el comentario de Liu Hui sobre el *Jiu Zhang Suan Shu* se basa en una oración del manuscrito donde se dice que fue escrito en el cuarto año del reino Jing Yuan del rey Chen Liu de Wei, lo cual lo sitúa exactamente en el año 263 d. de C. Véase a Li Yan y Du Shin-ran, *Chinese mathematics. A Concise History*, traducción de J. N. Crossley y A. W. C. Lun. Oxford: Clarendon Press, 1987, p. 65.

6. Needham, Joseph. *Science and Civilization in China*. Vol. 3: *Mathematics and the Sciences of the heavens and the Earth*. Cambridge: Cambridge University press, 1959, p. 235.

7. Gauchet, L. "Note sur la généralisation de l'extraction de la racine carrée chez les anciens auteurs chinois, et quelques problèmes du Chiu Chang Suan Shu", *Toung Pao*, 15 (1914), p. 531.

8. En las recientes excavaciones de tumbas en *Zhang Jia Shan* en Hu Bei se descubrió una obra escrita en tiras de bambú, el *Suan Shu Shu*, que se remonta a la primera mitad del siglo II a. de C. o bien a una fecha anterior. Tiene la forma de pregunta-respuesta como el libro *Nueve capítulos*. Contiene más de 60 tipos de cálculos, y algunos problemas se asemejan mucho a los que vienen en *Jiu Zhang Suan Shu*. Véase a Li y Due, 1987, p. 56.

9. Este es el problema 6 en el capítulo 9 de los *Nueve capítulos*.

10. Una exposición muy completa de este principio "xiang bu" se encuentra en Wu Wenchun, "The Out-In Complementary Principle", en *Ancient China's Technology and Science* (1983), pp. 66-89.

11. En el texto más antiguo se menciona que el arte de numerar tiene su origen en el círculo y en el cuadrado: "El cuadrado pertenece a la tierra; el círculo, al cielo". Se dice que este último deriva del cuadrado, que a su vez proviene del cuadrado T o cuadrado del carpintero. Así pues, las matemáticas aquí descritas están profundamente arraigadas en la experiencia práctica y en las herramientas del carpintero.

12. El carácter chino correspondiente a las "matemáticas" es interesante desde el punto de vista filológico. El carácter "suan", 算 se basa en el radical 貝, que significa porcelana de conchas o, en una forma un poco diferente, bienes. El símbolo 𥫱, transcrito antes, es el carácter que representa las tiras de bambú y se refiere a las tiras de este material usadas como marcas para clasificar los bienes. "Suan" designaba originalmente el tablero de conteo, con el cual se usaban los palos de recuento de bambú para efectuar los cálculos durante las transacciones y, más tarde, indicaban el ábaco o cualquier otro método de cálculo, entre ellos las matemáticas en general. Por tanto, el carácter "suan" abarca ideogramáticamente tanto los objetos como los métodos originales que eran la principal herramienta de los matemáticos de la corte y de los tribunales. Para mayores detalles, véase a Blakney, Raymond Bernard: *A Course in the Analysis of Chinese Characters*.

13. Lam Lay-Yong. *A critical Study of the Yang Hui Suan Fa. A Thirtheenth-century Chinese Mathematical Treatise*. Singapore: Singapore University Press, 1977.

14. Lam, 1977.

15. Los lectores no familiarizados con estos métodos pero que deseen conocer más sobre la aplicación de la semejanza de los triángulos y del método de doble diferencia deben consultar el artículo de Wu Wenchun, "The Out-In Complementary Principle", en especial la sección dedicada a "Gnomon, Shadow and Double Differences", en *Ancient*

China's Technology and Science (Beijing: Foreing Languages Press, 1983), pp. 66-89, pp. 68-70.

16. En realidad hay buenas razones para dar una respuesta positiva a esta pregunta, pues uno de los argumentos más fuertes en favor de las matemáticas puras ha sido siempre la potencia de sus aplicaciones. Esto constituye asimismo uno de los enigmas más desconcertantes de las matemáticas; nos referimos a las causas de las conexiones tan importantes entre el mundo ideal de las matemáticas abstractas y el mundo concreto sobre el que sus aplicaciones han resultado tan trascendentes.

17. Wagner, D.B. "An Early Chinese Derivation of the Volume of a Pyramid: Liu Hui, Third Century A.D.", *Historia Mathematica 6* (1979) 164-188.

18. Wagner, 1979.

19. He Shao-geng, "Method for Determining Segment Areas and Evaluation of π," in *Ancient China's Technology and Science*. Beijing: Foreign Languages Press, 1983, pp. 90-98, esp. 92.

20. Wagner, 1979.

21. Una detallada discusión de las circunstancias del contexto de las matemáticas pitagóricas y del inesperado descubrimiento de las magnitudes inconmensurables se da en Joseph W. Dauben, "Conceptual Revolutions and the History of Mathematics. Two Studies in the growth of knowledge", en *Transformation and Tradition in the Sciences*, ed. E. Mendelsohn. Cambridge, England: Cambridge University Press, 1984, pp. 81-103, especialmente la sección dedicada a "The Pythagorean Discovery of Incommensurable Magnitudes", pp. 84-89.

22. Glosa a Euclides, *Elementa*, X, 1 en *Opera Omnia*, ed. J. L. Heiberg (Leipzig: Teubner, 1888), p. 417. Otras versiones del episodio del ahogamiento se recogen en Iamblichus, *De Vita Pythagorica Liber*, XXXIV, 247, y XVIII, 88, ed. Ludwig Teubner (Leipzig: Teubner, 1937), pp. 132 y 52, respectivamente, y también Iamblichus, *De Communi Matematica Scientia Liber*, XXV, ed. Nicola Festa (Leipzig: Teubner, 1891), pp. 76-78. Sin embargo, Pappus considera a la historia del ahogamiento como una "parábola", *The Commentary of Pappus on Book X of Euclid's Elements*, Book I, sec. 2, eds. G. Junge y W. Thomson, Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1930; reimpreso, New York: Johnson Reprint Corp., 1968), p. 64.

23. Kline, Morris. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. New York: Oxford University Press, 1972, p. 50.

24. Desde el punto de vista de los chinos, uno siente la tentación de decir intereses abstractos e ilógicos, del mismo modo que los pitagóricos consideraban que su descubrimiento de las magnitudes incomensurables era ilógico, inexpresable e irracional.

Sobre corazones y hojas de hiedra: lo que los antiguos griegos hicieron con las curvas

Wilbur R. Knoor

Introducción: el estudio de las curvas en la antigüedad

Según la concepción moderna, las curvas se consideran como gráficas cartesianas de funciones, es decir, $y = f(x)$. Así pues, a partir de la función dada f, podemos obtener las propiedades de las curvas correspondientes, tales como los máximos y los mínimos, las tangentes, etc. Pero los antiguos geómetras no tuvieron acceso a una notación algebraica general de las funciones ni tampoco a la concepción algebraica general de la cantidad y la variación que constituyen el fundamento de una teoría global de las curvas. Para ellos, las curvas se presentan dentro de contextos especiales de algunas construcciones. Por lo regular, el esfuerzo de lograr una determinada construcción, digamos la trisección de un ángulo o la duplicación del cubo, dará origen a una figura que podría obtenerse partiendo de la hipótesis de una curva correspondiente.

Así fue como, por ejemplo, aparecieron las secciones cónicas en la geometría griega. Si se quiere multiplicar un cubo en determinada razón (digamos que se quiere obtener x tal que $x^3 : A^3 = B:A$ para las líneas A, B), se observa que el problema queda resuelto si se han encontrado dos líneas x, y, las cuales son medias proporcionales entre A, B; es decir

$$A:x = x:y = y:B,$$

porque entonces $A^3:x^3 = (A:x)^3 = (A:x)(x:y)(y:B) = A:B$. ¿Pero cómo puede uno encontrar estas líneas medias x y y? Un geómetra, Menecmo, casi contemporáneo de Platón, hacia mediados del siglo IV a. de C., introdujo curvas auxiliares que cumplían las condiciones sobre x y y impuestas por las proporcionalidades anteriores, a saber:

Mathesis 7 (1991) 303-319

$$A \cdot B = x \cdot y,\ A \cdot y = x^2,\ y^2 = B \cdot x,$$

donde, si se supone que x y y forman ángulos rectos entre sí, la primera condición define cierta curva que recibe el nombre de "hipérbola", mientras que las condiciones segunda y tercera corresponden a curvas que se llaman "parábolas".

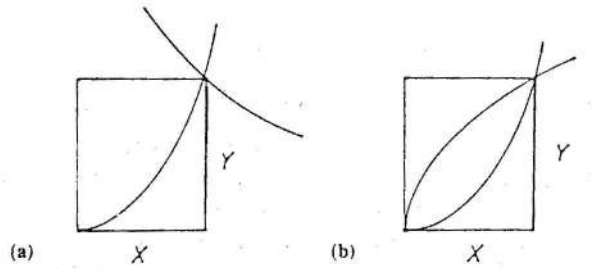


Figura 1

Sabemos que Menaechmus hizo todo esto para resolver la duplicación del cubo. Pero no sabemos cómo definió y construyó las curvas. Sin embargo, en la época de Euclides (hacia el año 300 a. de C.), se sabía que esas tres curvas pueden formarse como secciones de un cono.

En mi opinión, este aspecto no se enfatiza en la historia del estudio de las curvas durante la antigüedad: las curvas surgen dentro del contexto de la solución de problemas de construcción como el anterior y siempre captan el interés gracias a su utilidad en el examen ulterior de los problemas. Ello se advierte en las curvas para la duplicación del cubo de Menecmo, Arquitas, Eudoxio y Diocles, lo mismo que en la espiral y la cuadratriz, que pueden usarse para la cuadratura del círculo, y en otras curvas.

Teniendo presente esto, podemos ahora iniciar nuestra búsqueda: existe una curva que los antiguos llamaron "cisoide". ¿Qué cosa es? Analizaré primero la respuesta habitual y demostraré que no puede ser correcta. Después, al examinar la evidencia referente a esta curva, lo mismo que el posible contexto que la rodeó en el estudio de problemas de construcción en la antigüedad, propondré otra respuesta. Por último, recurriré a la evidencia adicional aportada por la ciencia y el arte de aquella época y así intentaré convencerlos de que la nueva respuesta tiene muchas probabilidades de ser la correcta.

I. La curva moderna llamada "cisoide"

Consulte cualquier libro moderno sobre curvas y seguramente encontrará que la que recibe el nombre de "cisoide", o bien "cisoide de Diocles" se define de la siguiente manera: tome un círculo, con diámetros *AB*, *GD* formando ángulos rectos, y trace dos medias cuerdas cualesquiera *HZ*, *KE* formando ángulos rectos con *GD* y situadas simétricamente respecto de *AB*. Si traza *DE*, esta línea intersectará *HZ* en un punto *o* que se dice se encuentra sobre la "cisoide".

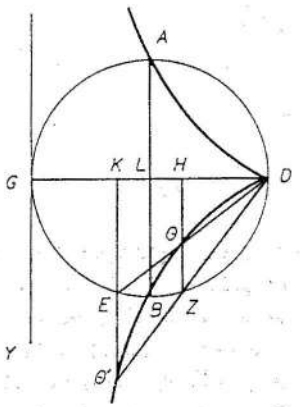


Figura 2

A semejanza de todas las curvas, ésta tiene muchas propiedades interesantes. Por ejemplo, si traza una tangente al círculo en *G* y extiende *DE* para encontrar esa tangente en *Y*, entonces $YE = \theta D$ para todos los puntos θ sobre la curva. Esta es, en realidad, la definición usual de "cisoide"; si mueve *E* a lo largo de una curva arbitraria, en vez de sobre un círculo, se puede entonces obtener toda una familia de variantes de cisoides. Otra propiedad de la cisoide primaria es que *E*θ siempre está bisectada por el diámetro vertical AB.

Esta curva la presentó el geómetra Diocles (hacia el año 200 a. de C.) para la duplicación del cubo. La manera en que se hace esto se entiende bien si llenamos el diagrama de construcción trazando las líneas *DM*, *MG* con los ángulos rectos en *D*, *M*. Después la figura toma *H*θ, *HD*, *HM*, *HG* en proporción geométrica continua, mientras que podemos tomar *GH*, *H*θ en cualquier razón que escojamos. Por tanto, *HD*, *MH* se convierten en las dos medias proporcionales entre las líneas da-

das que sabemos, por lo que se dijo antes acerca de la solución de Menecmo, resolverá el problema.

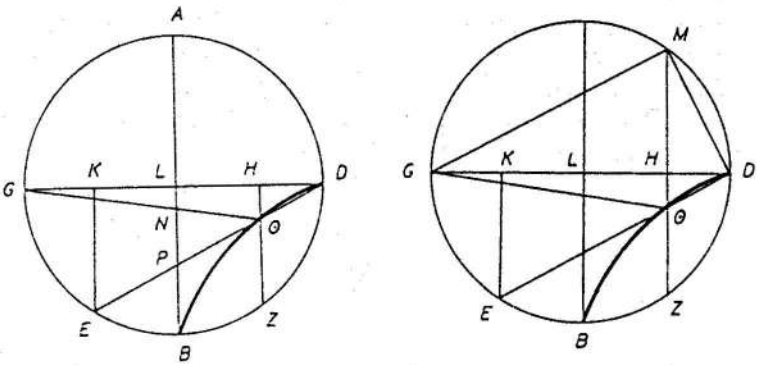


Figura 3

Ahora bien, en las historias modernas a esta curva se le da comúnmente el nombre de "cisoide de Diocles". Pero Diocles no la llama así en su construcción y uso de la curva. El único nombre con que la designa es "curva". Aparentemente alguien intentó reunir dos incógnitas: que Diocles definió esta curva a la que no le dio nombre, y que otros geómetras dieron el nombre de "cisoide" a una curva que no definieron (por lo menos en los documentos a los que tenemos acceso hoy). Y dos incógnitas nos dan un hecho: *voilà* la "cisoide de Diocles". Todo parece indicar que esta serie de suposiciones y conjeturas se remonta a principios de 1600 y está ligada a Etienne Pascal, el padre del filósofo Blas Pascal.

No importa. El razonamiento, por débil que sea, no tiene ningún otro apoyo o fundamento. En primer lugar, el texto tomado del libro de Diocles (que en griego sólo nos ha llegado en fragmentos citados por un comentador matemático del siglo VI d. de C.) ha sido recuperado en su traducción al árabe, y descubrimos una vez más que Diocles omite el nombre de su curva. En segundo lugar, el término griego "cisoide" significa "en forma de hiedra", y uno de los comentadores señala explícitamente que la curva recibe su nombre del hecho de que posee una figura semejante a la hoja de esa planta. Los historiadores han intentado explicar de qué manera la curva semeja una hoja de hiedra. Pero para ello habría que reflejar la curva alrededor de su eje o bien combinarla con el

círculo base en formas que violan la concepción de los antiguos sobre lo que es una curva.

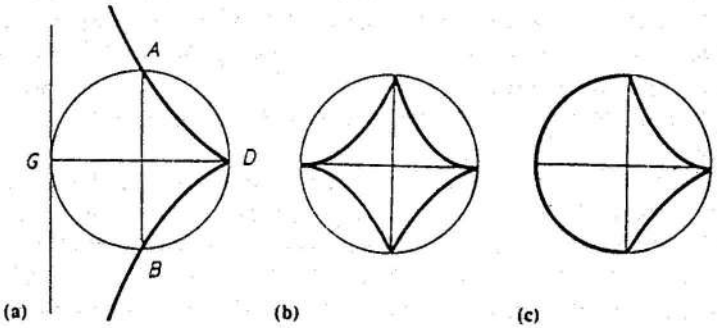


Figura 4

Sea como fuere, aun cuando alguna de estas figuras se parezcan mucho a la hiedra, no hay texto que pudiera hacer de ellas algo más que sólo conjeturas.

II. Descripciones antiguas de la "cisoide"

Y ahora hablaremos de los escritores de matemáticas que discuten la "cisoide". No hay más que dos: Pappus, que vivió en el siglo IV d. de C., y Proclo, que vivió a mediados del siglo V.

Primero nos ocuparemos de Proclo. Dedica al tema de la "cisoide" mucho espacio en varios pasajes de su comentario sobre el Libro I de los *Elementos* de Euclides. Por desgracia, nunca se tomó la molestia de definirla explícitamente, pues seguramente suponía que el lector podía consultar la definición en otro libro en caso de no saberla. En todo caso, menciona cuatro características:

1) es una curva finita que encierra una figura, como el círculo y la elipse, pero es distinta de la hipérbola y la parábola;
2) llega a un punto ("cúspide"), como una hoja de hiedra; de ahí su nombre;
3) forma un ángulo consigo misma, como la hipópeda (o curva de "ocho figuras"), la concoide y otras;
4) es una curva "regular mixta": parecida a las espirales por ser generada por una combinación de movimientos lineales y rotacionales,

pero diferente a las curvas "mixtas irregulares" delimitadas por distintas curvas regulares; por ejemplo, los segmentos circulares.

Esto es un comienzo pero suficiente para demostrar que son erróneas las hipótesis anteriores sobre la "cisoide de Diocles". Primero, la cisoide moderna se dirige al infinito y esto viola el 1). Ahora bien, si inventamos una figura que contenga la curva dentro de su círculo de definición, entonces obtendremos una curva "mixta irregular", y esto viola el 4).

Pappus no nos dice mucho. Pero hace una cosa que, a mi juicio, ofrece un importantísimo punto de arranque cuando se busca un candidato: en forma regular asocia "cisoide" (o "cisoides" en plural) con "concoide" (o "concoides"). Proclo también lo hace, por lo menos en el 3). Por tanto, quizá si consideramos lo que son las concoides, podamos tener una pista acerca de las cisoides.

III. El estudio de las concoides en la antigüedad

Un libro dedicado exclusivamente a la curva "en forma de coquina o mejillón" fue escrito por un geómetra, Nicomedes, probablemente hacia el final del siglo III a. de C. Tal vez convenga ver primero por qué definió la concoide. En una famosa solución de la trisección de un ángulo, la cual se remonta a Arquímedes (que vivió pocas décadas antes de Nicomedes), se utiliza una regla deslizante (operación llamada *neusis* en griego). Tracemos un ángulo AOE como ángulo central en el círculo con centro O; extendamos indefinidamente el diámetro EOD hacia afuera. A continuación, usando A como pivote, se desliza una regla alrededor de A de modo que la parte de ella que se encuentra entre el círculo y el diámetro extendido (segmento BC) sea igual al radio del círculo. Se observa que el ángulo en C es un tercio del ángulo dado AEO.

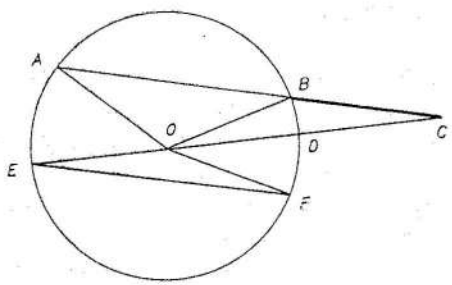


Figura 5

[*Prueba:* puesto que el triángulo *BOC* es isósceles, $\measuredangle O = \measuredangle C$; puesto que $\measuredangle ABO$ es un ángulo exterior, $\measuredangle ABO = \measuredangle O + \measuredangle C = 2 \measuredangle C$; puesto que el triángulo *ABO* es isósceles, $\measuredangle B = \measuredangle A$; puesto que el $\measuredangle AOE$ dado es un ángulo exterior, $\measuredangle AEO = \measuredangle A + \measuredangle C = \measuredangle B + \measuredangle C = 3 \measuredangle C$.]

Todo esto parece muy bien. ¿Pero cómo se pone la línea *BC* en la forma requerida? Para Arquímedes la cuestión carece de sentido, puesto que *neusis*, la manipulación de la regla en la forma ya descrita, es una operación geométrica aceptada. Pero uno podría buscar otras formas de determinar la posición de *B*. Y es aquí donde entra en juego la concoide de Nicomedes. Supóngase que definimos una curva como el lugar donde todos los puntos *B* que se hallan a determinada distancia (igual al radio del círculo) respecto de una línea dada (igual al diámetro extendido *ED*), tal como se mide en determinada dirección (es decir, hacia el punto fijo *A*). En efecto, a medida que la regla de nuestro problema se desliza, alrededor con un segmento marcado igual al radio y conservando su punto extremo *C* sobre el diámetro extendido *ED*, el otro punto extremo *B* traza la concoide. Entonces, donde la concoide intersecta el círculo (en *B*) resulta ser la solución del problema.

Este procedimiento no define sólo una curva, sino cuatro, según la manera como escojamos los tamaños y posiciones relativos de los tres parámetros: el pivote *D*, la distancia fija del segmento *EK* y si medimos la distancia respecto al eje *AB* acercándonos o alejándonos del pivote. La "primera" concoide se halla en el lado del eje opuesto a *D*; las otras tres formas se encuentran en el mismo lado que *D*. Como la he dibujado aquí, el punto *B* de la figura de trisección del ángulo está sobre una concoide de la cuarta forma. Pero es posible modificar la figura y obtener otra solución a través de una concoide de la "primera" forma.

Nótese cómo todas estas formas son curvas no acotadas: tienden infinitamente hacia la línea base en forma asintótica. Como se indica en la figura, la tercera forma llega a una cúspide y la cuarta se corta a sí misma formando un rizo. Y todo esto ya nos indica por qué Pappus posiblemente apareó "concoides y cisoides". Las formas tercera y cuarta de las concoides nos recuerdan las propiedades 2) y 3) que Proclo atribuye a la cisoide.

Volvamos ahora a la figura para la trisección del ángulo (Fig. 5). Para encontrar *B* tratamos de ajustar la longitud del segmento fijo entre el círculo y la línea dada, el diámetro extendido *ED*, conservando un punto extremo del segmento marcado en la línea y midiendo la longitud fija hacia adentro, en dirección de *A*. También pudimos haber conservado el otro

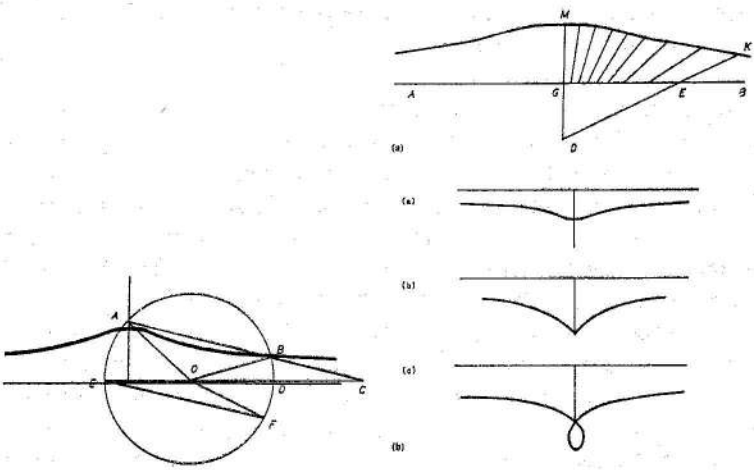


Figura 6

punto extremo sobre el círculo y medido la longitud desde *A*. Si seguimos este nuevo procedimiento, el punto *c* trazará entonces una curva en relación con el círculo como su base de referencia. ¿Es claro que esta clase de curva sería de gran utilidad al analizar problemas de construcción? En efecto, del mismo modo que las concoides pueden utilizarse siempre que se realice una *neusis* en relación con determinada línea, también el nuevo tipo de curva puede emplearse ahora cada vez que se efectúe una *neusis* respecto de un círculo cualquiera. Además de la trisección del ángulo, tenemos otros ejemplos de las construcciones anteriores en fuentes antiguas, en particular un conjunto de problemas contenidos en el libro *Líneas espirales* de Arquímedes.

IV. Concoides basadas en un círculo

En la nomenclatura moderna, las curvas de este nuevo tipo reciben el nombre de "concoides con base circular". A continuación me gustaría proponer que éstas son las curvas que los antiguos geómetras llamaban "cisoides".

Ante todo, consideremos las diversas formas de esas curvas. A semejanza de las concoides, dependen de la elección del pivote, la distancia fija y su orientación respecto de la base, que resulta ser un círculo en lugar de una línea recta. Además, es importante si el pivote se halla fuera del círculo, dentro de él o sobre él. Por eso hay más formas que antes:

i) cuando el pivote se encuentra sobre el círculo. Existen tres formas básicas: si la distancia fija es menor que el diámetro del círculo, se obtiene un rizo hacia adentro; si es igual al diámetro, se obtiene una cúspide, y si es mayor que el diámetro, una figura como frijol. A propósito, cualquiera de estas curvas puede ser generada alternativamente como la huella de un punto en el círculo que rueda a lo largo del círculo dado, es decir, como un "epicicloide". En los libros modernos se selecciona para un estudio especial el caso particular de la figura con la cúspide, a la que se conoce como "cardioide". Es decir, se supone que tiene la forma de un "corazón", o que por lo menos luce como tal.

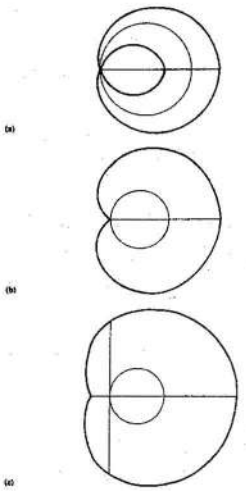


Figura 7a

ii) cuando el pivote se encuentra fuera del círculo. Esto es semejante al caso de la concoide y, por lo mismo, hay cuatro formas. Al medir la distancia sobre el lado opuesto del círculo desde el pivote, se obtiene la curva correlacionada con la "primera concoide", una figura

con forma de frijol o habichuela. Si se mide sobre el mismo lado que el pivote y si la distancia fija es menor que la que hay entre el pivote y el círculo, se obtiene un óvalo distorsionado; si esa distancia es igual, se obtiene una cúspide, y si es mayor, se obtiene un rizo con forma de ocho.

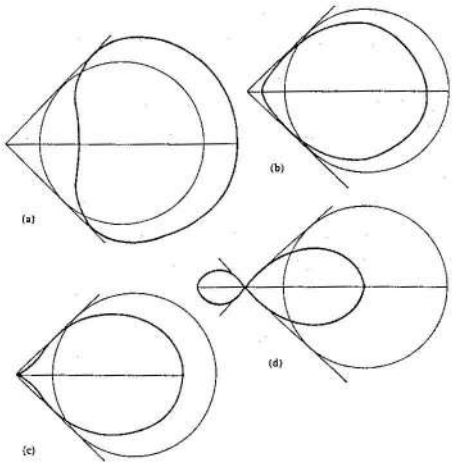


Figura 7b

iii) cuando el pivote está dentro del círculo. Esto produce varias figuras de formas convexas que semejan frijoles o habichuelas; si el pivote se halla en el centro, se obtienen círculos.

¿Qué tanto concuerdan estas curvas con las descripciones dadas por Proclo?

1) Todas son curvas finitas que encierran figuras, como se requiere en 1). Y esto, de hecho, es la característica principal que distingue entre las nuevas curvas y las concoides.
2) Dos de las formas tienen una cúspide, como se exige en 2). Se supone que una de ellas guarda una fuerte semejanza con una hoja de hiedra. Tendremos que esperar unos momentos antes de decidir cuál de ellas —si es que alguna— es.

3) Dos formas se cruzan consigo mismas y forman un rizo, y una de ellas nos recuerda la figura ocho de la hipópeda. Sin embargo, también podría decirse que las dos formas con cúspide "forman un ángulo consigo mismos" tal y como se requiere en 3).
4) Todas son "formas regulares mixtas", puesto que los movimientos que las generan son una rotación alrededor del pivote combinada con una medición lineal a lo largo de una línea en dirección hacia el pivote o desde él. Por supuesto, también las concoides y las espirales que Proclo explícitamente cita en 4), pertenecen a esta clase.

Así pues, de lo anterior se deduce que las nuevas curvas encajan de manera admirable en la descripción. En particular, las dos formas con cúspide satisfacen todas las propiedades que menciona Proclo. Queda por comprobar, entonces, si los griegos pensaban que estas formas semejaban hiedras.

V. Evidencia adicional tomada de la botánica y del arte

¿Cómo podemos averiguar la forma que los antiguos griegos atribuían a la hiedra? En primer lugar podríamos hacer algo de investigación empírica y observar una hiedra. Se conocen muchas formas diferentes.

Figura 8

Por si usted piensa que la antigua hiedra tenía un aspecto distinto al que conocemos en el momento actual, le recomendamos leer las descripciones en el tratado de botánica Teofrasto, un discípulo de Aristóteles. Mejor aún, puede examinar los dibujos de la hiedra en la enciclopedia médica de Dioscórides, de quien poseemos un hermoso manuscrito ilustrado que se remonta a principios del siglo VI de nuestra era. Es obvio que la antigua especie *hedera helix* es la misma planta que se hoy nos resulta familiar en Europa y en América.

Figura 9

Pero ninguna de nuestras curvas se parece mucho a ellas, si bien tampoco se diferencian mucho. Pero creo que hemos tomado un enfoque equivocado. ¿Cómo, por ejemplo, intentaría usted "ver" la forma de corazón que percibimos nosotros? Seguramente no lo haría consultando fotografías anatómicas, sino recurriendo a modalidades populares del arte. En efecto, tal vez le cueste bastante trabajo explicar cómo la popular forma de corazón se desarrolló a partir de la forma real que constata la biología.

Por la misma razón, propongo entonces contemplar el arte antiguo para intentar "ver" cómo los griegos percibían la forma de la hiedra. Y esto

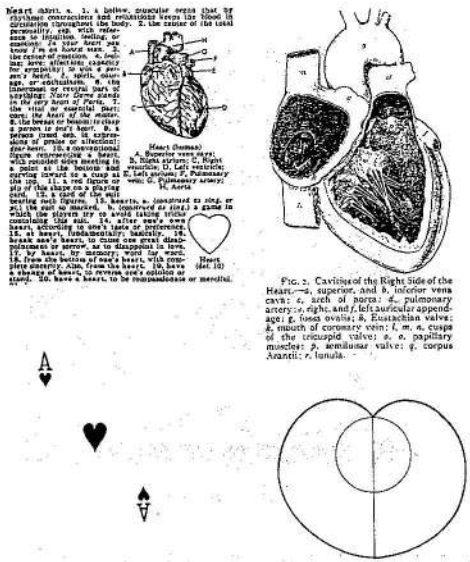


Figura 10

es fácil de hacer. En efecto, los alfareros griegos dibujaron las formas de la hiedra en muchas de sus obras. La próxima vez que vaya a un museo de arte antiguo, busque la figura de la hiedra; se sorprenderá al ver la frecuencia con que aparece en vasijas, joyas, cerámica y decoraciones de pared. Yo he encontrado docenas de ejemplos en libros dedicados a las vasijas de la antigüedad. El motivo de la hiedra es especialmente popular en escenas donde se representa al dios del vino, Dionisio, en orgías con amigos, mujeres desquiciadas, sátiros y personajes semejantes. A continuación se muestran algunos ejemplos.

Adviértase que la forma casi siempre es la misma: la hoja tiene dos lóbulos amplios cerca del tallo y luego se va estrechando hacia el extremo, que puede ser afilado o romo. Me parece que tiene más semejanza con un corazón que con la hiedra. De todos modos, la hoja se dibuja con una cúspide pronunciada entre los lóbulos y otra cúspide en el extremo. Si volvemos a las dos formas con cúspide entre las concoides de base circular, la primera muestra una cúspide con dos lóbulos y la otra tiene una cúspide en el extremo. Pero ninguna de ellas ostenta ambos elementos. Creo que la forma de dos lóbulos es tan prominente en la hiedra de los artistas, que deberíamos escoger la primera y eliminar la segunda.

Figura 11

Como dije antes, las formas de la hiedra en las vasijas lucen más como corazones. La curva que he escogido, la que tiene una cúspide que apunta hacia adentro y un extremo suave, es la que los matemáticos modernos llaman curva "cardioide", por su parecido con la forma del corazón. Creo que los geómetras de la antigua Grecia hicieron lo mismo: tomaron esa forma y la asociarion a dicha curva. Pero la llamaron "hiedra" en vez de "corazón".

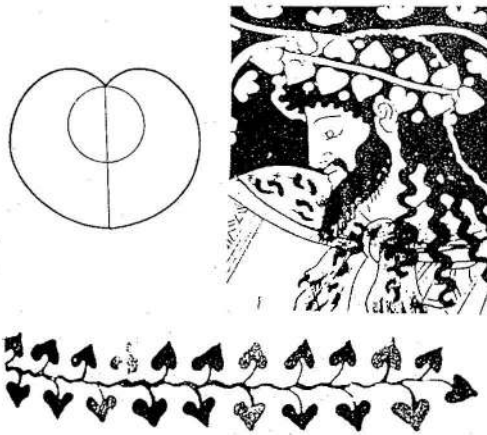


Figura 12

VI. Una digresión hacia la astronomía

Veamos brevemente otro lugar donde aparecen formas: en las constelaciones señaladas por los astrónomos. En el *Almagesto*, Ptolomeo enumera las coordenadas de 1022 estrellas, agrupadas en 48 constelaciones. Al hablar de las estrellas que se encuentran cerca de la constelación de Leo, pero que no quedan incluidas en ella, menciona una "forma de hiedra". No quiere decir que se trate de una constelación propiamente dicha, sino que alude a las estrellas que constituye el grupo que llama "Trenza", es decir *Coma Berenices*. De hecho, menciona tres estrellas, con sus coordenadas: la "parte del extremo norte de Coma", es decir, la estrella que ahora lleva el número 15 en *Coma Berenices*, junto con las dos "proyecciones meridionales", una en el lado occidental (número 7 Com) y la otra en el lado oriental (número 23 Com), añadiendo luego "con una figura en forma de hiedra". La figura 13a muestra dichas estrellas.

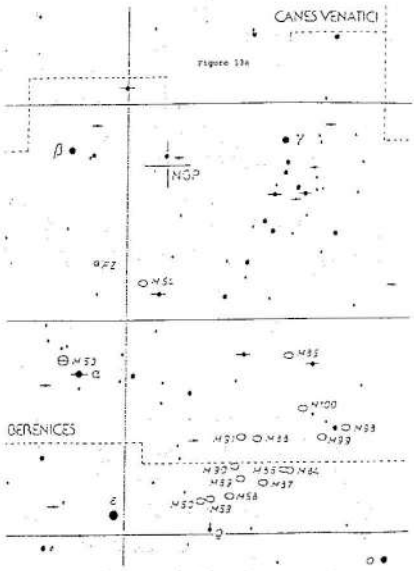


Figura 13a

Nótese que forman un triángulo que establece los límites de un cúmulo de estrellas que el propio Ptolomeo denomina "masa nebulosa". A la luz de nuestros hallazgos acerca de la hiedra, lo anterior indica que tiene en mente la Fig. 13b.

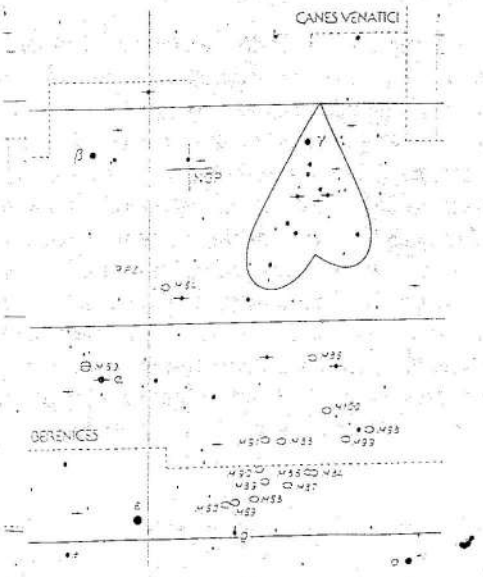


Figura 13b

Es decir, el grupo compacto de estrellas constituye un grupo que adopta la forma de la hiedra, con la punta arriba y los dos lóbulos sobresaliendo por debajo.

VII. Conclusión

Este intento de identificar qué curva tenían en mente los antiguos cuando hablaban de la "cisoide" nos ha llevado por diversos rumbos. La asociación de las "cisoides" con las conocidas "concoides" nos ha revelado que había cierta relación en los modos en que se formaron unas y otras. Examinar la familia de "concoides basadas en el círculo" nos ha llevado a curvas que corresponden a las descripciones que los antiguos dieron de las "cisoides" y ha destacado entre ellas las dos formas con cúspides. La incursión en el ámbito de la botánica no nos ha permitido sacar ninguna conclusión, pues las curvas que tenemos en mente no se parecen a una verdadera hiedra, como lo exigiría el nombre "cisoide". Por otra parte, podríamos preguntar también qué tienen que ver las "cisoides"

con las conchas de coquinas, como su nombre lo indica. Por tanto, esta discrepancia no debería desalentarnos mucho.

Sea como fuere, al buscar en los senderos del arte, hemos encontrado formas que los artistas buscaban, sugirieron hojas de la hiedra y que semejan bastante las curvas que hemos venido examinando. Conviene señalar que la hiedra de los artistas coincide con nuestra concepción de la forma del corazón, justo como yo he propuesto que la antigua "cisoide" se identifica con la "cardioide moderna".

Desde luego, existe una infinidad de curvas que, en teoría, podrían examinarse como alternativas viables. Lo que limita el ámbito de la búsqueda es lo que mencioné al inicio: que los griegos generaban curvas sólo en la medida en que éstas ayudaban a resolver problemas geométricos. Ese es, en efecto, el contexto que condujo a Nicomedes a generar las concoides, es decir, el deseo de construir la solución que Arquímedes dio a la trisección del ángulo, sustituyendo la suposición del uso de la *neusis* por una curva. Esa misma figura ofrece un contexto para las curvas que he propuesto actuando como una simple variante del modo en que Nicomedes dibuja sus concoides.

Aun así, este es un problema histórico sumamente frustrante. Cuando no se cuenta con testimonios explícitos, será difícil pensar y estar plenamente convencidos de que una reconstrucción es correcta. Sin embargo, debo aclarar que me sorprendería mucho descubrir otra curva que se acomode a la evidencia tan bien como las curvas que he propuesto.

Hay un antiguo proverbio del romano Publio Siro: "No necesitas poner la rama de la hiedra sobre el vino que se vende". Parece que también los antiguos tenían este sentimiento acerca de la hiedra, y que consiste en intuir que si uno se esfuerza demasiado, tal vez se termine por perder la venta.

Bibliografía

Para mayor información sobre la "cisoide" y las versiones artísticas de la hiedra, consulte a W. R. Knoor, *The Ancient Tradition of Geometric Problems*, Boston, 1986, cap. 6.

En lo tocante a los aspectos astronómicos, véase a Knoor, "Another Look at Ptolemy's Ivy Leaf" (que aparecerá en el *Journal for the History of Astronomy*, 1991).

La codificación y matematización de la ingeniería francesa en el siglo XVIII: el caso de Bernard Forest de Bélidor

Janis Langins

Los historiadores de la ingeniería, entre quienes se cuenta Hans Straub, han descrito el siglo XVIII como el periodo que presenció la aparición de una verdadera ciencia de la ingeniería, la cual sustituyó a lo que la gente llama, tal vez sin reflexionar mucho, técnicas artesanales tradicionales y métodos prácticos de la ingeniería. Los acontecimientos ocurridos en Francia fueron de capital importancia en todo este proceso que tuvo como principal representante a Bernard Forest de Bélidor (1697/1698-1761). Aunque la primera de las "dos nuevas ciencias" de Galileo había aparecido un siglo antes de Bélidor y bien podría haber sido llamada ciencia de la ingeniería, que yo sepa fue Bélidor el primero en emplear la designación "La ciencia de los ingenieros" como título de su libro que fue publicado por primera vez en 1729. El concepto de ciencia de la ingeniería sigue suscitando controversias, y hay algunas personas (tanto ingenieros como filósofos de la ciencia) que sostienen que no existe tal cosa [Bunge, Fores]. En vez de gastar más tinta en los problemas epistemológicos de innegable interés asociados al tema, mi propósito es más modesto: examinar detenidamente el libro de Bélidor para averiguar lo que dijo e intentar determinar lo que quería lograr. También me ocuparé de la más difícil cuestión de la respuesta dada a sus ideas por los ingenieros del siglo XVIII en lugar de la de los historiadores de la ingeniería en el siglo XX.

Bélidor, quien provenía de una familia militar y quedó huérfano en su niñez, fue criado por otra familia también militar en cuyo seno adquirió el gusto por las matemáticas y la ciencia, afición que fue estimulada y cultivada por el hermano de su madrastra, un ingeniero militar [Grandjean de

Mathesis 7 (1991) 321-337

Fouchy 167-181]. Como era de suponerse, pasó el resto de su vida como oficial de artillería y profesor de matemáticas. Si bien durante algún tiempo tuvo la idea de recibir las órdenes sagradas, al parecer lo disuadió el Regente de Francia en persona por recomendación de La Hire y Cassini. Bélidor había trabajado bajo las órdenes de esos dos miembros eminentes de la Real Academia de Ciencias en la medición del meridiano que va del Canal de la Mancha a París y les había impresionado profundamente su capacidad.

En 1720 fue nombrado profesor de matemáticas en la recién fundada escuela de artillería de regimiento en La Fère, donde su enseñanza y trabajo atrajeron la atención internacional [Hahn]. Se convirtió en miembro de la Sociedad Real de Londres, de la Academia Real de Prusia y Miembro Correspondiente de la Academia Real de Ciencias en París. Sus homólogos eran científicos prácticos como Pitot y Bouguer, hasta que finalmente fue elegido miembro asociado de la Academia en 1756, cinco años antes de su muerte.

Durante su vida, a Bélidor se le conoció por varias innovaciones técnicas en la tecnología militar, pero lo que le valió fama perdurable fue su actividad como autor de obras de matemáticas y de ingeniería. Su primer libro, *Nouveau cours de mathématique*, publicado en París en 1725, parece ser un resumen de las lecciones que impartió en La Fère. Se hicieron varias ediciones en francés y también se publicaron traducciones en alemán y en ruso. Después se editaron su clásico texto *La Science des ingénieurs* (1729), que acabamos de mencionar y del cual volveré a ocuparme más adelante, un manual práctico para artilleros (*Le Bombardier français*) en 1731, su gran obra *Architecture hydraulique*, publicada entre 1737 y 1753, y un *Dictionnaire portatif de l'ingénieur* en 1755. La *Science des Ingénieurs* y la *Architecture Hydraulique* tuvieron muchas ediciones y traducciones. Se reimprimieron en Francia todavía en 1830 y 1819, respectivamente, con notas de Navier, y una traducción al alemán de *La Science des Ingénieurs* apareció en el periodo entre 1857 y 1858. Ambas obras son consideradas fundamentales por los modernos historiadores de la ingeniería [Straub, Channell].

Antes de valorar la originalidad y la aportación que al desarrollo de la ingeniería y de las matemáticas hicieron los libros de Bélidor, en especial *La Science des Ingénieurs*, se necesita estudiar brevemente el *Nouveau cours de mathématiques*, porque en él descubriremos muchos datos acerca de su autor y de sus intereses.

En varias páginas del libro, Bélidor repite que desea ser "claro, útil e interesante" [Bélidor 1725, "Préface"]. Lo que bien podría haber sido el

lema del inicio de la Ilustración refleja una actitud que condiciona el contenido y el estilo del libro. Bélidor reconoce que las matemáticas son una forma excelente de adiestrar el intelecto para los estudios abstractos como la física y la metafísica; pero a pesar de ello se dirige a lo que considera su objetivo principal: los oficiales de artillería y los ingenieros militares. En consecuencia, siempre que puede aplica las matemáticas a temas de evidente utilidad. Su enfoque es pragmático, elemental y operacional.

Además del formato tradicional de teoremas, proposiciones, pruebas, corolarios y comentarios u observaciones, sistemáticamente incluye varios problemas prácticos resueltos o ejemplos de cada tema expuesto. En general, son ejemplos con que los soldados están familiarizados: en lugar de manzanas, naranjas y peras, se usan granadas y triunfos en juegos de azar en los ejemplos de solución de sistemas sencillos de ecuaciones algebraicas. Promete en su libro que las aplicaciones de la trigonometría "agradarán a todos aquellos a quienes no les gusta trabajar si no ven inmediatamente el uso de las proposiciones que están aprendiendo" [Bélidor 1725, 211].

Bélidor sugiere ejemplos más avanzados para los alumnos de su grupo que tienen interés e inclinación por estos estudios. Incluso llega a recomendar el libro de Malebrance *De la Recherche de la vérité* y a asegurar a los oficiales que no deben avergonzarse si son vistos con un libro de metafísica en las manos: puede ser más útil incluso que los *Comentarios de la Guerra de las Galias*, de Julio César, porque les enseña los métodos del razonamiento científico y riguroso. También recomienda a Mariotte, Rohualt, Varignon, el marqués de l'Hôpital, además de Descartes, las *Mémoires* de la Academia de Ciencias y algunos autores menores. Sin embargo, al hablar de l'Hôpital piensa que a los estudiantes posiblemente les parezca un "poco abstracto" y recomienda el comentario complementario de Crousat.[1] El lector moderno tiene la impresión de que Bélidor menciona esos nombres para complementar la información y para el beneficio de un selecto grupo de lectores, no para el lector común a quien en particular pretende alcanzar.

Por eso no debe extrañarnos que no se observa interés por el rigor científico y ni siquiera respeto por el enfoque tradicional de Euclides. Así, afirma con orgullo que ha incluido más información en 12 proposiciones de lo que lograra Euclides en las 72 de sus dos primeros libros. Y afirma haber resumido en 16 proposiciones "los descubrimientos más hermosos de Arquímedes sobre la esfera, el cono y el cilindro" [Bélidor, 1725, "Préface"].

La *Science des Ingénieurs*, que debía ser la primera de una serie de cuatro obras, se compone de seis partes foliadas y a las cuales se hace referencia como libros individuales. La primera parte de esta obra, titulada "Sobre la teoría de la albañilería", se centra en las dimensiones y perfiles de los muros de contención, tema de evidente utilidad en la construcción de fortalezas con sus terraplenes masivos revestidos de mampostería. En esta parte, no hay nada más complicado que elementos sencillos de estática y de álgebra, pese a que Bélidor procura aplicarlas a los problemas de la mecánica de suelos, lo mismo que a la estabilidad de estructuras elementales. Los supuestos que hace al analizar los muros de contención de mampostería (materiales homogéneos y cimientos perfectamente sólidos) y los suelos (éstos se deslizan sobre un plano de 45 grados) son a menudo falaces, aunque no más que los propuestos por otros, tanto antes como después de Belidor, para resolver estos problemas. Sin embargo, le proporcionan respuestas que compara luego con la práctica común, en particular con la del casi legendario Vauban, cuyas palabras sobre el tema casi habían adquirido la fuerza de las Sagradas Escrituras.

En la segunda parte se ocupa de la estabilidad de los arcos, basándose en gran medida en la obra de sus predecesores, especialmente en la del matemático La Hire [Heyman 82-84 y 162-189]. Una vez más las suposiciones son algunas veces arbitrarias, pero apuntan hacia un diseño excesivo y, por lo mismo, los resultados prácticos son aceptables en la construcción ordinaria de edificios. Navier señala lo siguiente en sus notas sobre la reimpresión del libro de Bélidor efectuada casi un siglo más tarde: Bélidor sabía muy bien que la falla del arco rara vez se debía a una deficiencia propia, sino al asentamiento de la cimentación [Bélidor 1729, 131]. La tercera parte está dedicada a la descripción de materiales de todo tipo que se emplean en la construcción. Se trata de una descripción al estilo de un catálogo, acompañada de algunos principios teóricos basados en la química anterior a Lavoisier. En la cuarta parte se estudia la construcción de edificios militares y civiles. Junto con las descripciones de las pruebas que realizó sobre la resistencia de las vigas de madera para verificar las relaciones entre dimensiones y esfuerzos de fractura, aquí se ponen de relieve principalmente la disposición y diseño de varios edificios. Lo que hoy pertenece al dominio de la arquitectura destaca aún más en la quinta parte, donde se ocupa de la decoración de edificios. No es más que una descripción de los órdenes clásicos y de la ornamentación, tema central de los tratados de arquitectura desde la época de Vitruvio. La última parte contiene modelos de descripción de proyectos y ofrece una propues-

ta para proyectos civiles y militares. Se toman ejemplos concretos del propio Vauban y también de otros ingenieros eminentes.

Bélidor aclara que esta última parte de *La Science des Ingénierus* es realmente la más importante para cualquier ingeniero y que todo lo realizado antes era mera preparación. Su observación señala una tensión muy importante de lo que podríamos llamar el programa de ingeniería de Bélidor. Por una parte, quiere que esta disciplina se vuelva más matemática; más exactamente, quiere que el lenguaje de la ingeniería sea algebraico. La matemática no sólo debe aportar las reglas de la ingeniería sino también su lenguaje. Nos dice que él habría prescindido del álgebra de haber podido, pero le resulta imposible: las reglas de la ciencia únicamente pueden ser entendidas por quienes hablen y comprendan este lenguaje. Hace ochenta años (hacia el año en que murió Descartes) el álgebra apenas si se conocía:

> Pero confío en que llegará el día en que los geómetras, físicos, ingenieros y arquitectos piensen más o menos en la misma forma [Bélidor 1729, 159].

Por otra parte, quiere codificar la práctica tradicional de la ingeniería francesa para ahorrarles a los ingenieros tiempo y trabajo, al presentarles de modo racional y eficiente el rico y variado acervo de los conocimientos que los ingenieros suelen adquirir con mucho esfuerzo y en forma no sistemática durante los largos años de experiencia y aprendizaje en su práctica profesional. Así, aparte de la estática ingenieril y sus aplicaciones, el libro contiene una recopilación de los modelos de los "maestros del arte", ya que la "experiencia es la regla que puede seguirse con confianza en el arte de la construcción, sobre todo cuando lo único que uno debe hacer es imitar el trabajo ya realizado de manera exitosa" [Bélidor 1729, 302]. Sin embargo, esta es la misma persona que dice también lo siguiente:

> ... el trabajo ... debe basar su solidez en las reglas del arte más que en la abundancia de materiales pues, si uno pudiera conocer bien el mecanismo apropiado a esta disciplina, uno podría construir edificios mucho más audaces que aquellos a los que se ha tributado tanto honor en siglos pasados. Uno trabajaría con seguridad y no vería la timidez que es tan común en la construcción moderna [Bélidor 1729, 62].

La misma dualidad del pensamienbo de Bélidor es evidente en su forma de juzgar la obra de Vauban. Le profesa gran admiración e incluso transcribe grandes extractos de la obra de Vauban en su libro, sobre todo en el pequeño manual que Vauban dedica a la dirección de los sitios de

trabajo y al procedimiento administrativo titulado *Directeur Général des Fortications*. También reimprime la tabla que, según la tradición, Vauban habría distribuido y en la cual figura el espesor de distintas alturas de los muros de contención con una pendiente estándar de uno en cinco. Sin embargo, señala que

> cuando uno está acostumbrado a actuar conforme a los principios de las matemáticas, fácilmente se crea dificultades. A menos que la prueba sea evidente en todo cuanto nos presentan como correcto, el intelecto no queda satisfecho, y lo que parece indudable a los ojos del mundo a menudo despierta gran inquietud entre los geómetras. Esa es la actitud que desde hace mucho tengo hacia M. de Vauban [Bélidor 1729, 83].

Los perfiles estándar de Marshal han de ser buenos, puesto que funcionan de manera satisfactoria. ¿Pero que sucede si su diseño es excesivo? Y Bélidor aplica sus deducciones matemáticas, que son el tema de la primera parte de su libro, a los perfiles propuestos por Vauban y descubre que efectivamente, para los muros de retención de 10 pies de alto, el espesor es casi el doble de lo suficiente para garatizar la seguridad. Para los muros de 20 pies de alto, hay un factor de seguridad de 25%, para los de 30 pies el margen es de un octavo, y disminuye a un diecinueveavo a 40 pies y a un veintavo a 50 pies para alturas superiores a los 60 pies, los muros con el espesor sugerido por Vauban son peligrosamente inestables conforme a los cálculos de Bélidor. No obstante, sabe que los fuertes de Vauban no se derrumban y también conoce la causa. La mayor parte de los muros son bastante bajos (en el intervalo donde las prescripciones de Vauban pecan por exceso en cuanto al espesor) e incluso con muros más elevados no son aplicables los supuestos referentes a la cohesión del suelo al deducir el espesor teórico de los muros. En la práctica, el suelo es sumamente compacto, con capas, y está reforzado con maleza y árboles, de modo que no se desliza suavemente para producir una pendiente natural de 45 grados, la que Bélidor emplea en sus cálculos.

¿Por qué preocuparse entonces por las deducciones teóricas y por qué publicar los resultados? La respuesta nos la da el otro propósito fundamental de Bélidor: además de la codificación de la práctica ingenieril —la matematización del lenguaje del ingeniero e inculcar nuevos hábitos de pensamiento y razonamiento que según Bélidor son los del matemático— desea

> ... poner a los que se dedican a la ingeniería en condiciones de examinar exactamente las cosas en formas que lleven a la verdad y a los principios

que se aplican a muchos otras disciplinas que se relacionan con ésta [Bélidor 1729, 91].

La elección de las materias y problemas estratégicos para los ingenieros es una aportación innovadora de Bélidor, y marca los lineamientos generales de las principales materias de un programa de ingeniería que se convertiría en el canónico para la ingeniería civil. También reúne por primera vez, en forma muy clara y sistemática, una gran cantidad de material nuevo que antes se hallaba esparcido en publicaciones como las periódicas *Mémoires* de la Academia de Ciencias. Con todo, no podemos calificarlo de creativo en el sentido de que haya aportado soluciones nuevas, y evidentemente superiores, a los problemas de ingeniería. Nada de eso encontramos en Bélidor. Su creatividad muestra dos aspectos estrechamente relacionados entre sí. Primero, es un traductor. Desde luego, la traducción no es una simple transferencia de información, de carácter mecánico e inequívoco, sino una actividad eminentemente creativa a través de la cual la información y los conocimientos de una cultura se incorporan a otra en un proceso que siempre entraña una transformación más que una simple transferencia.

Bélidor es un traductor y divulgador de información que había sido generada por matemáticos y científicos de la Academia Real de Ciencias. Al hablar de su investigación dedicada a la resistencia de materiales (de la madera, en este caso), menciona la obra del académico Parent, que según Bélidor, es la única persona que ha publicado material sobre este tema, en las *Mémoires* de la Academia Real de Ciencias, pero "de una manera demasiado refinada para que todos logren entenderlo ..." [Bélidor 1729, 309]. Basta hacer una comparación visual de las páginas donde La Hire trata de la estabilidad de los arcos en su *Traité de mécanique* [Prop. 125] con el tratamiento que de ellos hace Bélidor en *La Science des Ingénieurs* para darse cuenta de que nos hallamos ante dos lenguajes diferentes, y el de Bélidor es sin duda el más familiar para el lector.

Continuando con la metáfora lingüística, el segundo aspecto de la creatividad de Bélidor puede describirse como la enseñanza de un lenguaje desconocido para los ingenieros. Es una especie de Moisés que desciende de un Monte Sinaí de las matemáticas no sólo con leyes útiles, sino con un lenguaje para leerlas, entenderlas y aplicarlas, así como para formular otras nuevas. No intenta traducirlo al dialecto de artesanos semiletrados atrapados en una jerga poco apropiada para asimilar toda la riqueza y complejidad del mensaje que les transmite. A semejanza de los campesinos de la Edad Media que debían aprender el latín para luego estudiar la

filosofía escolástica, Bélidor quería que sus ingenieros adquiriesen un tipo especial de dominio básico de la ciencia sin el cual quedarían atrapados por siempre dentro de los estrechos límites de la rutina y la tradición. Sin embargo, es muy moderno en su papel de profesor de idiomas: no contento con limitarse a exponer las reglas formales y la gramática, enseña el lenguaje usándolo en el contexto de la práctica usual del ingeniero, método que seguramente le sugirió su experiencia como maestro en la escuela de artillería.

Pero Bélidor sabe, como lo indican los comentarios en la última parte de su libro dedicada a las propuestas de proyectos, que los ingenieros son juzgados finalmente por su rendimiento. La concepción, el diseño y el análisis son parte fundamental del trabajo ingenieril que pueden transformarse con ayuda de un nuevo lenguaje matemático. Pero, junto con este dominio que Bélidor desea mejorar y ampliar, existe asimismo, un área de detalles y procedimientos prácticos, susceptibles de clasificación y codificación (aunque no de análisis en la época de Bélidor) que el ingeniero necesita asimilar si quiere ser eficiente. Ambos aspectos se estudian en su libro, aunque el aspecto teórico de la ingeniería es el más original y fue el que atrajo la atención de sus contemporáneos y de los historiadores.

No sólo en la organización global de la obra, con algunos capítulos que se concentran en el análisis y otros en la clasificación, sino también en cada capítulo se manifiestan las tensiones del enfoque. En efecto, el propio Bélidor se refiere a ellas explícitamente. Así, la segunda parte (cuyo tema es la teoría de los arcos) comienza con un análisis teórico de la estabilidad de los arcos expuesto en lenguaje algebraico. Pero aun antes de hacerlo, procura asegurarle al lector impaciente que después de la primera parte habrá una sección

> que incluye las reglas para obtener el espesor de los pilares de los arcos de toda clase recurriendo exclusivamente a cálculos con números, para que entiendan el procedimiento quienes no saben álgebra [Bélidor 1729, 159].

La muy sencilla expresión algebraica de Bélidor [1729, 113ss.] para encontrar el espesor de los pilares en que se apoya el arco de la figura 1 es

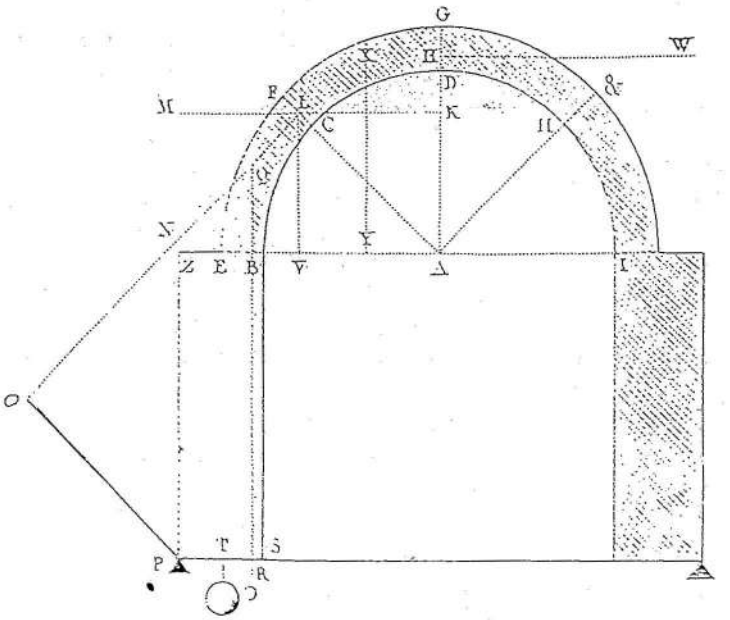
$$y = -2n^2/d + /-\{2n^2/d(a+d-c+g+2n^2/d)\}^{1/2}$$

donde

$y = PS$, espesor de los pilares

$a = LK$, KA, distancia entre el centro del arco y el punto medio de la unión de las dovelas superior e inferior

n^2 = área de cada dovela
$c = BV$, distancia entre la vertical que pasa por el punto medio de la unión de las dovelas superior e inferior y el borde interno del pilar
$d = ZP$, altura de los pilares
$g = RS$, distancia entre el borde interno del pilar y el punto directamente debajo de Q (el centro de gravedad de la dovela CFEB)



$$y = -2n^2/d \pm \sqrt{2n^2/d\,(a + d - c + g + 2n^2/d)}$$

$y = PS$
$a = LK$
n^2 = *área de las dovelas*
$d = ZP$
$c = BV$
$g = RS$

Figura 1. Tomada de *La Science des ingénieurs;* la notación es de Bélidor.

En la segunda sección, destinada a aquellos "que no saben álgebra", Bélidor se limita a ofrecer un ejemplo de un problema concreto y se sirve de la fórmula anterior. El único cambio en relación con el ejemplo práctico (en que también utiliza números específicos) incluido en la sección anterior, más "teórica", es la decisión de ignorar los términos c y g. Ambos son pequeños respecto a a y d, y el término g siempre es menor que c. Así, la omisión de los términos significa simplemente la omisión de un pequeño valor negativo, que en realidad nos da un valor ligeramente mayor y, en consecuencia, un valor más seguro para el espesor del pilar. Nos hallamos frente a unas matemáticas ingenieriles perfectamente legítimas y aceptables, si bien Bélidor no se toma la molestia de mencionar este aspecto. Al parecer, la eliminación de unas cuantas operaciones matemáticas para los lectores que no saben álgebra es más importante para él. Pone todo su empeño en guiarlos de la mano aun en los detalles nimios, evitando escrupulosamente cualquier alusión a los símbolos del álgebra, indicando cuáles dimensiones multiplicar y luego separar para manipulaciones aritméticas posteriores. En el ejemplo anterior, hace que el lector proceda en etapas. El resultado es una aritmética simple en que, según había prometido el propio Bélidor, la extracción de una raíz cuadrada es la operación más complicada.

Lo que más sorprende al lector moderno no es el análisis práctico de ingeniería en que se hacen suposiciones de modo que aumenten los factores de seguridad, sino lo que implícitamente parece ser una repugnancia casi infantil que muestran sus supuestos lectores ante los símbolos algebraicos. Bélidor sabe muy bien que la preocupación por el detalle, la naturaleza elemental de sus cálculos y la agobiante y en ocasiones repetitiva solución de ejemplos podría "... aburrir a la gente inteligente, a quien le parecerían tediosos, pero les suplico que recuerden que un libro como éste no está escrito para ellos" [Bélidor 1729, 301].

El ingeniero de principios del siglo XVIII parece tener un bloqueo mental ante el álgebra y las fórmulas algebraicas. Gracias en parte a Bélidor esto comenzó a cambiar, pero los lectores de aquella época prefirieron recurrir a tablas que fungieron tanto como resúmenes de hechos que como guías de procedimientos. Para la ingeniería militar de la Francia de aquellos años, las tablas transmitidas por Vauban, entre otras las referentes al espesor de los muros de contención, reflejaban la práctica más generalizada y las costumbres administrativas, además de que ahorraban trabajo mental. Bélidor sabía esto y lo tuvo en cuenta.

Ya antes nos referimos a su refutación de la validez de esas tablas, lo mismo que a la reimpresión de ellas como un código de la práctica de la

construcción, imperfecto quizá, pero que serviría de estándar o patrón indispensable para garantizar la uniformidad. Incluso la investigación de ingeniería realizada por Bélidor se da en términos de tablas. Así, luego de idear un método para calcular la resistencia de los muros de contención sin parapetos adicionales y sin contrafuertes de apoyo, presenta una tabla de resultados.

> Ya que hay personas que tal vez se sientan desconcertadas al aplicar las reglas que he enseñado respecto a los revestimientos de terraplenes y a las rampas porque no entienden muy bien las razones en que se fundan, he juzgado conveniente incluir una tabla que les evitará efectuar cálculos largos y tediosos, en los cuales siempre se corre el riesgo de cometer errores si no se procede con mucha cautela ... [Bélidor 1729, 55].

En parte, la finalidad de incluir tablas es facilitarles el trabajo a los ingenieros al eliminar cálculos tediosos, pero en parte es ayudarles a quienes están acostumbrados a cálculos sumamente simples, así como para evitar que cometieran errores aquellos para quienes la manipulación algebraica era una experiencia misteriosa y terrible.

El libro de Bélidor tuvo gran aceptación no sólo en la Academia de Ciencias, sino entre los oficiales de alto rango del ejército. Y parece ser que al autor lo alentó y apoyó el marqués d'Asfeld, jefe de la unidad militar, en la publicación de su libro [Blanchard 179]. Pero como Bélidor no estaba escribiendo para sus colegas en la Academia Real de Ciencias ni únicamente para los jefes de la unidad militar de ingeniería, sino sobre todo para el ingeniero común y corriente, es interesante conocer la reacción de este grupo cada vez más numeroso e importante. ¿Hasta qué punto fue aceptado el programa de Bélidor?

Es difícil dar una respuesta directa a esta pregunta e incluso la evidencia indirecta es escasa y no ha sido examinada a fondo hasta hoy. Pero podemos ofrecer una respuesta preliminar. Así, el ingeniero Buchotte, un contemporáneo de más edad que Bélidor, opinaba que los ingenierios, a diferencia de los artilleros, arquitectos y hasta los oficiales de infantería, no contaban con un auténtico tratado de su disciplina.[2] *La Science des Ingénieurs*, libro que escoge para atacarlo en el prefacio a su propio libro sobre el tema, a su juicio no cumplía esta función.[3] Estaba convencido de que la secciones que Bélidor dedica a la mecánica y a la arquitectura no tenían cabida en un texto de ingeniería. La esencia real del trabajo de un ingenierio, según afirma Buchotte, era la administración de proyectos y el mantenimiento ("service des places"), y se quejaba de que Bélidor no había tratado satisfactoriamente esos aspectos. Otros ingenieros más emi-

nentes, entre ellos Louis de Cormontaigne (1696-1752), dentro de otro contexto acusaron a Bélidor de ser un hombre de escuela ("auteur d'école") lleno de "ideas eruditas".[4]

Parece, pues, que pese a sus decididos protectores, Bélidor encontró seria oposición no sólo por parte de los artilleros, sino también por parte de los ingenieros.[5] A semejanza de tantos otros profetas, a Bélidor no se le honró en su patria. La persona que más se acercó a ser su descendiente intelectual, el ingeniero y científico Coulomb (quien atacó muchos de los problemas que expone Bélidor en su memoria a la Academia de Ciencias en 1773), también fue una figura aislada en el Cuerpo Real Militar de Ingenieros. Conviene señalar que Coulomb abordó (sólo que con mayor éxito y en una forma matemática más sofisticada) los mismos problemas básicos que Bélidor había tratado en sus libros primero, segundo y cuarto de *La Science des Ingénieurs*: mecánica de suelos, teoría estructural, teoría de los arcos y resistencia de materiales. No obstante, es un dato muy significativo que su obra haya sido escrita para la Academia Real de Ciencias. Igual que Bélidor, Coulomb consideró los problemas de ingeniería desde el punto de vista del ingeniero. Aun así muchas de sus ideas fueron ignoradas en su propia unidad de ingeniería durante 20 años o más.[6]

Hay indicios de una creciente aceptación de los libros de Bélidor como manuales para resolver los problemas básicos de ingeniería: el cálculo del tamaño de los pilares de los arcos conforme al método modificado de La Hire, propuesto por él, parece haberse convertido en la norma y siguió siendo utilizado hasta principios del siglo XIX. Pero su enfoque, en contraste con sus resultados, no gozó de amplia aceptación. En Bélidor hay la creencia implícita de que existe una esfera del conocimiento que llamaríamos hoy tecnológica, la cual es susceptible de análisis, manipulación y expansión, basada en principios generales expresables en el lenguaje de las matemáticas, y que se concibe en oposición a lo que sería una mezcolanza de técnicas particulares. Bertrand Gille [cap. 8-10] piensa que, tras algunos precursores aislados durante el periodo helenista, esta creencia apareció por primera vez en el Renacimiento italiano simultáneamente con los primeros balbuceos de la Revolución Científica. Esta fue estimulada poderosamente por el efecto fecundador de ese enfoque, pero no obtuvo apoyo entre los ingenierios y revivió apenas a fines del siglo XVIII en Francia. Bélidor constituye una manifestación temprana de ese renacer, pero en la década de 1730 era una voz que predicaba en el desierto. Esto se debió a otras razones y no sólo a simples celos personales y de grupo de los militares que reaccionan ante un extraño. A mi juicio, esto tiene mucho que ver con las actividades profesionales rutinarias y con la estructura institu-

cional de los cuerpos militares de ingenieros franceses durante el siglo XVIII en el periodo que siguió inmediatamente a la muerte de Vauban.

La eficiencia de los cuerpos de ingenieros militares franceses no provenía simplemente, y ni siquiera principalmente, de las innegables dotes de sus integrantes ni de los adelantos técnicos de Vauban, no obstante su gran importancia. La razón fundamental hay que buscarla en una eficiencia administrativa difícil de lograr en una sociedad preindustrial que no conocía muchas de las cadenas y hábitos que caracterizan a la sociedad moderna. A pesar de la tendencia centralizadora y racionalizadora del Estado francés, que alcanzó su nivel máximo gracias a Luis XIV y sus excelentes ministros, ni el material humano ni las infrestructuras sociales sobre las que descansaban eran muy flexibles o adaptables. Los primeros éxitos de los esfuerzos de la Corona se centraron en el ámbito de la administración gubernamental y en la milicia.

El cuerpo de ingenieros militares tenía que resolver complejos problemas logísticos tanto en tiempos de paz como en tiempos de guerra, problemas que exigían trabajar dentro de los límites más estrechos impuestos por la economía, pues había que manejar enormes presupuestos geográficamente dispersos en un país donde las tradiciones de las provincias todavía podían competir con los mandatos provenientes de Versalles y eran implantadas en un lenguaje remendado con las voces regionales y unidades locales de medición. Integrar cientos de ingenieros (siempre más de 255 y algunas veces llegaron a 390) en un cuerpo coherente no era tarea fácil, por muy natural e inevitable que parezca bajo una mirada retrospectiva [Blanchard 1979, 213). No es extraño por eso que Roland Mousnier, el eminente historiador de las instituciones francesas, catalogue a los *Ingénieurs des ponts et chaussées* como los antecesores y modelo del futuro *fonctionnaire* (servidor civil) [II, 546-556].

Desde un punto de vista burocrático, lo que habría tenido importancia capital era el control y la uniformidad de las personas, los procedimientos y los productos del cuerpo de ingenieros militares. Conforme a la opinión generalizada de los ingenieros, los informes y las prácticas estándar habrían tenido más valor que el solo virtuosismo técnico. Sea como fuere, para el ingeniero común la administración de proyectos era la esencia de su trabajo y no el diseño innovador, que de hecho sería dejado en manos de los ingenieros expertos más destacados y de mayor antigüedad en los casos en que se requiriese una nueva construcción. Estos casos se iban haciendo cada vez menos frecuentes después de los programas masivos de construcción de edificios de Luis XIV los cuales habían ido agotando el erario público. Así, la descripción de puestos de Vauban y sus propuestas

fueron tan admiradas por Bélidor como sus innovaciones en el diseño de fortalezas. La descripción de un proyecto mostraba con toda claridad las verdaderas cualidades del ingeniero y su asimilación de las cualidades ingenieriles de orden, claridad y método [Bélidor, 1729, 512]. Sin duda Bélidor pensaba que también esto constituía un elemento clave del conocimiento de la disciplina; pero para la mayor parte de sus lectores era la parte *más* importante del conocimiento de un ingeniero. En efecto, para ellos las tablas del espesor de paredes y pendientes elaborados por Vauban no eran más que el elemento técnico de los *conocimientos prácticos* del ingeniero. En cambio, para Bélidor esto tenía tanta o más importancia que la administración diaria de los proyectos.

La interpretación anterior tal vez parezca contradecir gran parte de lo escrito sobre el cuerpo francés de ingenieros militares, donde se ha insistido mucho, y con sobrada razón, en la escuela de ingeniería militar fundada en Mézières en 1749. Ella contó con estudiantes tan ilustres como Borda, Coulomb, du Buat y Lazare Carnot, lo mismo que con insignes profesores, entre quienes cabe mencionar a Bossut, Monge y Hachette en matemáticas y el abad Nollet en física. El nivel de la enseñanza de las matemáticas era elevado, quizá más alto que en cualquier otra instutición del mundo de aquella época. No obstante, es preciso tener en cuenta dos puntos. Primero, el que los profesores de matemáticas no eran los únicos ni eran los más importantes en esa escuela militar, a pesar de que la admisión se basaba en un examen muy estricto en esa disciplina [Taton 1964]. El jefe de la escuela era un oficial militar y, junto con las matemáticas, los oficiales de ingeniería enseñaban la fortificación práctica. La mayor parte de ellos había adquirido sus conocimientos a partir de su experiencia práctica en lugar de una instrucción formal y no tenían una buena opinión de los profesores de matemáticas, ni desde el punto de vista profesional ni del social [Taton 1947]. En efecto, y éste es el segundo punto que queremos recalcar, en el tiempo de la revolución la mayor parte de los oficiales de alto rango del cuerpo de ingeniería eran ancianos que no habían participado en el programa de Mézières [Augoyat II, 642]. La presión para instituir un programa de enseñanza altamente matematizado en Mézières provenía de extraños (académicos, ministros y examinadores) más que de los ingenieros. Para hombres como Fourcroy de Ramecourt (1715-1791), jefe no oficial del cuerpo de ingeniería cuando estalló la Revolución, el arte del ingeniero se basaba en la experiencia, vista como la compilación y asimilación de la experiencia pasada, y no en los principios matemáticos. Si pensar en términos de fórmulas matemáticas había tenido cierto éxito, lo tuvo en cuestiones muy primitivas e ingenuas, como en el caso de Four-

croy, cuyos "momentos de fortificación" fueron objeto de burla por parte de Lazare Carnot. Es verdad que por aquella época la mayor parte de los ingenieros jóvenes ya no temían al álgebra y se habrían sentido divertidos por el tono semiapologético de Bélidor medio siglo antes. Pero la mayor parte de los graduados de Mézières, al dejar la escuela y entrar en los rangos inferiores de la estructura militar, dejaban detrás su gran formación matemática. La necesitaban muy poco en su vida profesional y no les ayudaba mucho a progresar en su carrera militar. Incluso en Mézières, el historial académico de Coulomb hacía más hincapié en sus sucios trabajos como dibujante que en su talento matemático [Gillmor 17-18]. Los conocimientos matemáticos por los que Bélidor había predicado y que finalmente fueron alcanzados por las nuevas generaciones de ingenieros militares resultaban superfluos en la práctica ordinaria y además poco familiares para los oficiales de mayor edad. Sólo algunos ingenieros excepcionales, con un profundo interés por las matemáticas y las ciencias exactas, parecen haber realizado investigaciones originales en las ciencias de la ingeniería. Sin embargo dirigían sus ideas tanto a la Academia Real de Ciencias como a sus colegas.

En vísperas de la Revolución Francesa, únicamente un aspecto del programa dual de Bélidor (la codificación de la práctica y la especialización de la administración) había sido puesto en marcha en forma significativa. El otro, la creación de un análisis ingenieril basado en las matemáticas, finalmente había adquirido los requisitos previos al éxito: un grupo de ingenieros con conocimientos matemáticos que habían recibido una sólida preparación en matemáticas y mecánica. Pero en el cuerpo militar de ingenieros todavía no se contaba con el apoyo institucional, habiendo además pocas posibilidades de una aplicación práctica.

Notas

1. Se trata probablemente de Jean-Pierre de Crousaz, a quien el catálogo de la Bibliothèque Nationale incluye como autor de *Réfléxions sur l'utilité des mathématiques et sur la manière de les étudier...*, Amsterdam: L'Honoré et Châtelain, 1715, y también como autor de obras sobre el poeta inglés Pope.

2. Anne Blanchard [1981] indica que Nicolas Buchotte (1673?-1757) entró al cuerpo militar de ingenieros en 1706.

3. Esta obra parece haber permanecido en manuscrito (Bibliothèque de l'Inspection du Génie, Vincennes, France, MS 96 "L'ingénieur de place, ou la manière de servir dans les places"). El manuscrito sin fecha del prefacio se encuentra en los Archives de l'Inspection du Génie, Vincennes. Art. 21, sec. 7 párrafo 4, caja 1, núm. 9. Buchotte es probablemente el autor de una obra publicada sobre dibujo ingenieril *Les règles du dessin et du lavis pour les plans particuliers des ouvrages et de bâtimens ...*, París: C. Jombert, 1722.

4. Louis de Cormontaigne, MS in Archives de l'Inspection du Génie, Vincennes, Art. 21, sec. 1, párrafo 1, caja 3, núm. 17.

5. Augoyat [II, 178] cita una circular fechada el 13 de mayo de 1737, dirigida por el marqués d'Asfeld a los directores de la Fortificación [ingenieros de distrito], en que les pide que ordenen a todos los ingenieros que se suscriban a la primera parte de *Architecture hydraulique*, obra de próxima aparición, de Bélidor.

6. En sus notas a la reimpresión de *La Science des Ingénieurs*, Navier menciona que las ideas de Coulomb se conocían muy poco antes que Prony las retomara más de veinte años después en 1794 [Bélidor 1729, 92].

Bibliografía

1. Augoyat, A. 1860/64. *Aperçu historique sur les Fortifications, les Ingénieurs et le Corps du génie en France*. 3 vols. París: Tanera.

2. Bélidor, Bernard Forest de, 1725. *Nouveau cours de mathématique, à l'usage de l'artillerie et le génie où l'on applique les parties les plus utiles de cette science à la Théorie & à la Pratique des differens sujets qui peuvent avoir rapport à la guerre*. París: Nyon Fils.

3. Bélidor, Bernard Forest de, 1729. *La Science des Ingénieurs dans la Conduite des Travaux de Fortification et d'Architecture Civile*. París: Claude Jombert. Nótese que todas las remisiones de página a las que se hace mención [Bélidor 1729] están tomadas de la reimpresión hecha en 1830 de la edición de 1813, con notas de Navier.

4. Bélidor, Bernard Forest de, 1737/1750. *Architecture hydraulique ou l'Art de conduire, d'Elever, et de Menager les eaux pour les différens besoins de la Vie*. 6 vols. en 2 partes. París: Charles-Antoine Jombert, 1737-1750.

5. Blanchard, Anne, 1979. *Les Ingénieurs du "Roy" de Louis XIV à Louis XVI: Etude du Corps des Fortifications. Montpellier: Université Paul-Valéry (Montpellier III)*.

6. Blanchard, Anne. 1981. *Dictionnaire des ingénieurs* 1691-1791. Montpellier.

7. Bunge, Mario. 1966. Technology as Applied Science. *Technology and Culture* 7, 329-347

8. Channel, David. 1989. *The History of Engineering Sciencies: An annotated bibliography*. New York: Garland.

9. Coulomb, Charles-Augustin. 1776. Essair sur une application des règles de *maximis & minimis* à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture, *Mémoires de Mathématique & de Physique, preséntés à l'Academie Royale des Sciences par Divers Savans, & lùs dans ses Assemblés*. vol. 7(1773), pp. 343-82, Paris (1776). Esta memoria clásica la reproduce Heyman junto con una traducción y un excelente comentario histórico.

10. Fores, Michael. 1988. Transformations and the Myth of "Engineering Science": Magic in a White Coat. *Technology and Culture*. 29, 62-81.

11. [Fourcroy de Ramecourt, Charles-René de]. 1786. *Mémoires sur la fortification perpendiculaire par plusieurs officiers du génie*. Paris: Nyon.

12. Gille, Bertrand. 1964. *Les Ingénieurs de la Renaissance*. Paris: Hermann.

13. Gillmor, C.Stewart. 1971. *Coulomb and the Evolution of Physics and Engineering in Eighteenth-Century France*. Princeton: Princeton University Press.

14. Grandjean de Fouchy, Jean-Paul. 1761. *Eloge de M. Bélidor, Histoire de l'Académie Royale des Sciences*. Paris.

15. Hahn, Roger. 1964. L'Enseignement Scientifique aux Ecoles Militaires et d'Artillerie, *Enseignement et Diffusion des Sciences en France au XVIIIe Siècle*. René Taton, ed., pp. 513-545, Paris: Hermann.

16. Heyman, Jacques. 1972. *Coulomb's Memoir on Statics: An Essay in the History of Civil Engineering*. Cambridge: Cambridge University Press.

17. La Hire, Philippe de. 1729. *Traité de mécanique, où l'on explique tout ce qui est nécessaire dans la pratique des Arts, & les propriétés des corps pesans desquelles ont un plus grand usage dans la Physique*. Paris: La Compagnie des Libraires.

18. Mousnier, Roland. 1974/1980. *Les Institutions de la France sous la Monarchie Absolue 1598-1789*. 2 vols. París: Presses Universitaires de France.

19. Straub, Hans. 1964. *A History of Civil Engineering: An Outline from Ancient to Modern Times*. Cambridge, Mass.: MIT Press.

20. Taton, René. 1947. Una lettre inédite de Monge sur la situation en France en 1791, après la fuite du roi. *Revue d'histoire de sciences* 1, 358-59.

21. Taton, René. 1964. L'Ecole du Génie de Mezières, *Enseignement et Diffusion des Sciences en France au XVIIIe Siècle*. René Taton, Ed., pp. 559-615, Paris: Hermann.

22. Vauban, Sébastien le Prestre de. 1685. Le Directeur Général des Fortifications. The Hague: Henri van Bulderen.

Ecuaciones diferenciales en la teoría de perturbaciones planetarias de Lagrange

Craig G. Fraser

Introducción

El primer trabajo realizado por Lagrange en matemáticas, efectuado durante la década de 1750 y principios de la de 1760, se centró en el cálculo de variaciones y en la mecánica. Desde 1764 empezó a trabajar intensamente en las cuestiones teóricas de la astronomía física, nombre con que se le conocía entonces. Se trataba de un tema al que dedicaría gran parte de sus investigaciones en los siguientes veinte años. Su principal aportación al tema, hecha mientras era director de matemáticas en la Academia de Berlín y publicada en las memorias de esa institución, constaba de técnicas y resultados en la teoría de las perturbaciones. Ideó un método para investigar el movimiento de un planeta determinado que girase alrededor del Sol y que estuviera sujeto a una fuerza de perturbación procedente de un tercer cuerpo. Los principales objetos de interés fueron los sistemas Sol-Tierra-Luna y Sol-Júpiter-Saturno, y el problema consistía en explicar algunas anomalías de sus movimientos. Entre los problemas destacaba la desigualdad "grande" o "larga" en los periodos de Júpiter y Saturno, descubierta por los astrónomos al comparar las observaciones efectuadas a lo largo de siglos.

Lagrange se dedicó a sus investigaciones más importantes sobre las perturbaciones en el periodo comprendido entre 1775 y 1784. El otro gran investigador de la época era Laplace, quien había empezado a trabajar sobre el mismo tema en París a principios de la década de 1770. En 1785 terminó una memoria que contenía la explicación definitiva de la gran desigualdad de Júpiter y Saturno. Para conseguir su resultado, un enorme logro de la astronomía matemática, utilizó técnicas e ideas para las que

Mathesis 7 (1991) 339-350

Lagrange había abierto el camino, pero llevándolas un paso más lejos. Desde el punto de vista histórico, podría decirse que la teoría clásica de la estabilidad planetaria fue el logro conjunto de los dos hombres.

La aportación de Lagrange al estudio de las perturbaciones fue el método de variación de parámetros y el concepto asociado de función perturbadora. Al tiempo que llevaba a cabo este trabajo también se ocupaba del estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales. Esta investigación se refería a su utilización tan éxitosa y original de la idea de variar las constantes arbitrarias que aparecían en su solución. Parece evidente cierta clase de nexo entre su investigación en astronomía planetaria y su teoría de las ecuaciones diferenciales, y de hecho así se ha señalado en las obras sobre el tema.[1] Sin embargo, hasta hoy no se dispone de un estudio comparativo del contenido de esas investigaciones ni de las circunstancias exactas en que se llevaron a cabo. Este trabajo tiene por objeto dar inicio a dichos estudios.

Preludio historiográfico

La mecánica celeste del siglo XVIII no tenía el interés intelectual general que presenció el nacimiento de la astronomía heliocéntrica durante la Revolución Científica. Las memorias de Euler, Lagrange y Laplace son obras en vías de realización, intentos prolongados, provisionales y sumamente técnicos de analizar las irregularidades observadas en el movimiento de los planetas. A menudo se hace un gran esfuerzo en el desarrollo de alguna idea o técnica, sin que se obtenga la recompensa correspondiente en términos de los resultados alcanzados. En general, esos estudios carecen de la independencia teórica y de la profundidad de las investigaciones puramente matemáticas efectuadas por los mismos autores.

Aparte de la confusión técnica que caracterizó a su desarrollo inicial, la teoría clásica de las perturbaciones es difícil hoy en día debido a que no estamos familiarizados con ella. A diferencia del cálculo, del ciclo de Carnot o de la tabla periódica de los elementos (temas que son parte de la formación científica del estudiante contemporáneo), la teoría clásica [de perturbaciones] ya no forma parte de los programas de estudios en las universidades. El autor de un artículo histórico reciente sobre la gran desigualdad de Júpiter y de Saturno se vio obligado a recurrir a una descripción de George Airy hecha en 1836, con el fin de ofrecer la correcta explicación científica de este fenómeno.[2] Resulta difícil encontrar un libro publicado en el presente siglo que contenga algo que

semeje a la teoría clásica original. En unos apuntes de conferencias publicadas en 1969 escribía Shlomo Sternberg:

> En cierto modo, el trabajo de los astrónomos clásicos en la teoría de las perturbaciones ya no es importante para la predicción del movimiento de los planetas. El surgimiento de la astronomía por radar (y, en cierta medida, de las sondas espaciales) nos ha proporcionado una exactitud en las observaciones que supera con mucho lo que se sabía hasta entonces. Esta información se incorpora a las ecuaciones del movimiento que se integran numéricamente en una computadora de gran velocidad, en tanto que las constantes numéricas son reajustadas en forma constante para que se acomoden a los datos. Este trabajo ... permite a la computadora predecir las posiciones de los planetas con una precisión mucho mayor (por simple procesamiento de los datos) que la que se consigue aplicando la teoría clásica de las perturbaciones. En un sentido muy real, uno de los logros más trascendentes del hombre ... ha pasado al dominio de la máquina.[3]

Por último, conviene señalar que cuando hoy se aborda el tema de las perturbaciones, suele hacerse como si se tratara de un tema de análisis avanzado que incluye nociones de topología y de geometría diferencial.

Así pues, la historia de la astronomía física impone especiales demandas expositivas al historiador de la ciencia. La necesidad de contar con un relato de esta historia se hace evidente ante la prominente posición que ocupa la astronomía en las investigaciones físicas del siglo XVIII. Basta echar un vistazo a las memorias de París para percatarse del enorme interés por el tema, como igual lo indica la atención que se le da en las recopilaciones de las obras completas de los principales científicos de la época. La astronomía planetaria era la única ciencia matemática en el periodo anterior a 1800 que se desarrolló a través de la interacción sistemática entre observación y teoría.

Teoría de perturbaciones

En la siguiente exposición nos concentraremos en las innovaciones básicas logradas en la teoría de perturbaciones, más que en cómo las innovaciones sirvieron para explicar la observación. Las principales memorias en el desarrollo histórico de las aportaciones de Lagrange al tema son:

I) Las memorias de Euler ([1748] y [1749]) de 1747-1748 que contienen su deducción de las ecuaciones diferenciales del movimiento de los planetas y su introducción del método de la variación de constantes al análisis del sistema Sol-Júpiter-Saturno.

II) Las memorias de Lagrange ([1766] y [1777a]) de 1766 que contienen su estudio de los satélites de Júpiter y del sistema Sol-Júpiter-Saturno. Aquí sigue el planteamiento inicial de Euler.
III) La memoria de Lagrange ([1779]) de 1776 sobre la alteración de los movimientos medios de los planetas, que incluye su presentación del método de variación de constantes y la función perturbadora.

El trabajo efectuado por Euler en la década de 1740, lo mismo que el de Clairaut y el de d'Alembert, se ocupa de la deducción de las ecuaciones diferenciales del movimiento de los planetas. Por esa época apareció la forma analítica de lo que hoy se conoce con el nombre de segunda ley de Newton y se usó para analizar el movimiento descrito desde sistemas de coordenadas cartesianas o polares. La cuestión central de la astronomía planetaria era si la teoría gravitacional de Newton, y en particular la ley del inverso del cuadrado, era suficiente para "salvar" los fenómenos, o si había que modificarla o completarla con la suposición de otras entidades perturbadoras además de la interacción gravitacional mutua. En este sentido, toda la historia de la teoría de las perturbaciones en el siglo XVIII puede considerarse como la reivindicación sucesiva y definitiva de la hipótesis newtoniana.

El problema del movimiento de un solo planeta alrededor del Sol se resolvió completamente para una ley de fuerza del inverso del cuadrado y se demostró que implicaba una órbita elíptica en uno de cuyos focos se suponía que se encontraba el Sol. La posición del planeta se daba en términos de seis constantes arbitrarias: dos constantes que especificaban el plano de la órbita planetaria respecto a un plano fijo de referencia (la inclinación y la línea de nodos, es decir, la línea de intersección de los dos planos); dos constantes que daban el tamaño y la forma de la elipse (el semi-eje mayor y la excentricidad); una constante que determinaba la dirección del eje principal (línea de ápsides), y una constante que daba la posición del planeta en algún momento inicial fijo (posición en la época).

En la primera memoria de 1748 Euler dedujo las ecuaciones diferenciales del movimiento para un cuerpo puntual sobre el que actúa una fuerza cualquiera. Se sirvió de un sistema de coordenadas cilíndricas. La posición del cuerpo está dada por las coordenadas r, ϕ y z, donde r y ϕ son las coordenadas polares en el plano de referencia base de la proyección del cuerpo sobre este plano. Y z es la distancia perpendicular del cuerpo respecto del plano. Euler obtiene las tres ecuaciones (un poco simplificadas):

$$ddr - rd\phi^2 + Pdt^2 = 0 \quad (1)$$
$$2drd\phi + rdd\phi + Qdt^2 \quad (2)$$
$$ddz + Rdt^2 = 0 \quad (3)$$

donde P, Q y R son los componentes de la fuerza correspondientes a r, ϕ y z.

En determinado instante es preciso considerar el plano donde está moviéndose el cuerpo. Ese plano contiene el elemento diferencial de longitud de trayectoria y el origen. Tiene una inclinación ρ respecto del plano de referencia y lo interseca en la línea de nodos, línea que está dada por el ángulo π en el sistema polar de referencia. Usando geometría elemental tenemos la relación

$$z = rsen\,(\phi - \pi)\,tan\rho \quad (4)$$

Euler calcula el diferencial de z en términos de dr, $d\phi$, $d\pi$ y $d\rho$:

$$dz = drsen\,(\phi - \pi)\,tan\rho + r\,(d\phi - d\pi)\,cos\,(\phi - \pi)\,tan\rho + rd\rho\,sen\,(\phi - \pi) / cos^2\rho \quad (5)$$

Supone asimismo que las cantidades π y ρ están cambiando con mucha lentitud. Así, en el instante dado podemos suponer que el cambio de z producido por $d\pi$ y $d\rho$ es infinitesimal respecto de dz, dr y $d\phi$. Por tanto, obtenemos las dos ecuaciones diferenciales:

$$dz = drsen(\phi - \pi)\;\; tan\rho + rd\phi cos\,(\phi - \pi)\,tan\rho \quad (6)$$

$$rd\pi cos\,(\phi - \pi)\,tan\rho - rd\rho sen\,(\phi - \pi) / cos^2\rho = 0 \quad (7)$$

Lagrange pasa luego a calcular el segundo diferencial ddz a partir de (6), usa (7) para relacionar $d\pi$ y $d\rho$ y después los sustituye en la ecuación de fuerza (3) para conseguir

$$d\pi = [dt^2 sen(\phi - \pi) / rd\phi]\,(Psen(\phi - \pi) + Qcos\,(\phi - \pi) - R/tan\rho) \quad (8)$$

Finalmente, con base en (7) deduce la ecuación

$$dlogtan\rho = [dt^2 cos(\phi - \pi) / rd\rho]\,(Psen\,(\phi - \pi) + Qcos\,(\phi - \pi) - R/tan\rho) \quad (9)$$

Las ecuaciones (1), (2), (8) y (9) son las ecuaciones diferenciales utilizadas por Euler para analizar el movimiento perturbado de un cuerpo que forma parte de un sistema constituido por tres cuerpos. En la segunda memoria de 1748 recurre a un método semejante para analizar el movimiento de Saturno y Júpiter, y en los años siguientes utilizaría reiteradamente tales métodos para investigar el movimiento lunar. Todas sus investigaciones sobre teoría de perturbaciones se basan en la idea que acabamos de describir.

El método con que Euler modifica las constantes orbitales es una extensión bastante natural del problema de dos cuerpos planteado por Kepler. Su idea se funda en una innovación técnica específica sin que intervenga una revaloración teórica del problema del movimiento perturbado. Nótese que en su procedimiento las fuerzas de perturbación no están relacionadas en una forma analítica directa con la variación de los elementos.

Cuando Lagrange emprendió el estudio de las perturbaciones de los planetas en 1766, adoptó el método de Euler y escribió dos memorias en que lo aplicó. Diez años más tarde, en 1776, retomó el tema con un ensayo sobre movimientos planetarios medios. En él expuso por primera ocasión su principal aportación a la teoría de las perturbaciones. Ideó un nuevo y fundamental planteamiento analítico en el cual la cuestión del movimiento perturbado era tratada desde un punto de vista muy general como un problema en la teoría de ecuaciones diferenciales.

Comienza la memoria con las ecuaciones de movimiento para un cuerpo

$$F / r^2$$

sobre el cual actúa una fuerza de cuadrado inverso de magnitud F / r^2 dirigida hacia el origen y también una segunda fuerza perturbadora desconocida X, Y, Z:

$$d^2x/dt^2 + F_x/r^3 + X = 0 \quad (1)$$
$$d^2y/dt^2 + F_y/r^3 + Y = 0 \quad (2)$$
$$d^2z/dt^2 + F_z/r^3 + Z = 0 \quad (3)$$

Antes de proseguir la explicación de estas ecuaciones, examina el correspondiente sistema "homogéneo":

$$d^2z/dt^2 + F_x/r^3 = 0 \quad (4)$$
$$d^2y/dt^2 + F_y/r^3 = 0 \quad (5)$$

$$d^2z/dt^2 + F_z/r^3 = 0 \qquad (6)$$

Las ecuaciones (4), (5) y (6) son válidas para el movimiento kepleriano (el problema de dos cuerpos) y puede resolverse completamente para x, y y z en términos del tiempo t y seis constantes arbitrarias:

$$x = f(a_1,..., a_6, t) \qquad (7)$$
$$y = g(a_1,..., a_6, t) \qquad (8)$$
$$z = h(a_1,..., a_6, t) \qquad (9)$$

Lagrange toma ahora estas integrales y las deriva respecto del tiempo, obteniendo así tres ecuaciones más que contienen a las constantes arbitrarias. Sirviéndose de las seis ecuaciones resultantes expresa cada una de las constantes en términos de x, y y z y de las derivadas respecto del tiempo dx/dt, dy/dt y dz/dt. Supóngase que

$$V(x, y, z, dx/dt, dy/dt, dz/dt) = k \qquad (10)$$

sea una de esas expresiones para la constante k. Lagrange señala que si derivamos (10) respecto del tiempo, obtendremos una ecuación que contiene a x, y y z y a sus primera y segunda derivadas:

$$dV / dt = 0 \qquad (11)$$

Puesto que (10) también se obtuvo a partir de los sistemas (4), (5) y (6), la ecuación (11) también deberá ser equivalente a este sistema. Por tanto, si reemplazamos las segundas derivadas en (11) con las fuerzas correspondientes dadas por (4), (5) y (6) obtendremos una identidad en el miembro izquierdo (11) que se cancela dando cero.

Lagrange propone a continuación sustituir las segundas derivadas en dV/dt por las fuerzas presentes en el sistema original perturbado (1), (2) y (3). La parte de estas fuerzas que aparece en (4), (5) y (6) conduce a una identidad en la expresión para dV/dt que se cancela y nos da cero. En consecuencia, dV/dt se reduce a

$$-([\partial V/\partial[dx/dt]]\, X + [\partial V/\partial[dy/dt]]\, Y + [\partial V/\partial[dz/dt]]\, Z)$$

Dado que ahora estamos considerando el movimiento perturbado, las constantes arbitrarias variarán con el tiempo. Obtenemos, pues, la ecuación

$$-[(\partial V/\partial[dx/dt]]\, X + [\partial V/\partial[dy/dt]]\, Y + [\partial V/\partial[dz/dt]]\, Z)dt = dk \quad (12)$$

La ecuación (12), que nos da la variación de la constante arbitraria en términos de la fuerza de perturbación que actúa sobre el cuerpo, es la relación fundamental en la teoría de Lagrange. En los casos que considera, donde las fuerzas perturbadoras nacen de la acción gravitacional de terceros cuerpos, el miembro derecho (12) toma la forma

$$Xdx + Ydy + Zdz$$

que es una diferencial exacta. Su integral Ω es una expresión que en la mecánica celeste de épocas posteriores llegó a conocerse con el nombre de función perturbadora del sistema. El problema físico del movimiento gravitacionalmente perturbado se redujo, gracias a la teoría de Lagrange, al estudio matemático de esta función.

Una vez introducidos estos procedimientos, Lagrange prosigue en su memoria demostrando un interesante resultado en la teoría de la estabilidad planetaria. En el caso de Júpiter y Saturno presenta un argumento general para demostrar que, suponiendo que se hacen ciertas aproximaciones, las variaciones del movimiento medio que surjen de las interaciones gravitacionales mutuas deben ser periódicas y tampoco deben estar sujetas a ningún cambio secular o de incremento progresivo a largo plazo. Este resultado explicaba un descubrimiento reciente de la astronomía observacional, realizado por Johann Heinrich Lambert (colega del propio Lagrange) en la Academia de Berlín, y que sugería que la desigualdad del movimiento de los planetas exteriores era periódica aunque a largo plazo. Sus investigaciones posteriores estarían dedicadas a una investigación exhaustiva de este resultado.

Cuando Laplace recibió la memoria de Lagrange en 1779, le escribió en Berlín y elogió la "afortunada aplicación" de su "hermoso método". Dijo que "la elegancia y simplicidad de tu análisis me ha procurado un placer que no puedo expresar con palabras".[4] Más tarde calificaría de "descubrimiento extraordinario" la introducción de la función perturbadora por parte de Lagrange.

Teoría de Lagrange de las ecuaciones diferenciales

A mediados del decenio de 1770, en el periodo de dos años que precedió inmediatamente a la memoria principal de 1776, Lagrange escribió varios trabajos sobre temas de la teoría de ecuaciones diferenciales.[5] Investigó las ecuaciones diferenciales parciales de primer orden, las soluciones singulares a las ecuaciones diferenciales ordinarias y las ecuaciones diferenciales ordinarias no homogéneas. A pesar de que fueron investigaciones individuales e independientes, en todas ellas utilizó un procedimiento de "variación de constantes".

1) Lagrange [1774] introdujo el concepto de una solución completa para la ecuación parcial de primer orden como una solución que contiene dos constantes arbitrarias; el estudio de tales soluciones en términos de constantes y no de funciones arbitrarias representaba un nuevo enfoque del problema;
2) Lagrange [1776] demostró que las soluciones singulares de las ecuaciones diferenciales ordinarias pueden obtenerse de la integral general mediante la variación y eliminación de la constante arbitraria que aparece en la integral;
3) Lagrange [1777b] demostró cómo la variación de constantes puede emplearse para deducir una solución particular para una ecuación diferencial líneal ordinaria no homogénea a partir de la solución general de la ecuación homogénea correspondiente.

El interés de Lagrange en los dos primeros de estos temas parece haber sido ajeno a sus investigaciones que previamente había consagrado a la mecánica celeste; los problemas y métodos en cuestión son claramente independientes desde el punto de vista técnico y conceptual. Lo que sí revelaron estas investigaciones matemáticas fue el valor de desarrollar la teoría en términos generales, y con base en primeros principios y usando la idea de la variación de constantes.

Como se mencionó antes, las ideas de Lagrange sobre la solución de ecuaciones diferenciales datan aproximadamente de los dos años que precedieron su memoria de octubre de 1776 sobre las perturbaciones planetarias. No cabe la menor duda de que el trabajo que por esa época dedicó al análisis puro lo estimuló a reconsiderar teóricamente el problema global del movimiento perturbado. En su trabajo de mayo de 1776, que contenía el método de variación de parámetros, escribe:

> Es obvio que este método ... [será] muy útil para calcular los movimientos de los planetas en la medida en que los altera su acción mutua ... Ya he intentado aplicar este método en las investigaciones que dediqué a la teoría de Júpiter y de Saturno [en 1766]. Lo expongo aquí en una forma más directa y general; pero me propongo desarrollarlo en otras partes con mayor detalle y aplicarlo a la solución de algunos importantes problemas en el sistema del mundo.[6]

Cuando el nuevo método apareció seis meses después, mostraba las características de una teoría general totalmente desarrollada: las ecuaciones de movimiento de los sistemas perturbados y no perturbados se examinaban por separado; se aislaban las constantes arbitrarias como funciones de la posición y la velocidad; la variación de las constantes se formulaba en términos de las fuerzas de perturbación, y se introducía la función perturbadora.

Observaciones finales

La historia aquí reseñada presenta un estudio de la interacción entre las matemáticas y la física en el siglo XVIII. La introducción que en 1748 hizo Euler del método de la variación de constantes constituyó una innovación técnica natural y muy específica en el estudio matemático del problema de los dos cuerpos. El hecho de que, en los años sucesivos, no haya logrado desarrollar o ampliar esta idea en forma significativa indica que se necesitaba una nueva perspectiva para avanzar por este camino. Los métodos basados en el análisis matemático directo del problema físico habían alcanzado una dificultad insuperable.

En cierta medida la buena suerte explica el exitoso desarrollo de los métodos de perturbación por parte de Lagrange. Lo abstracto de la concepción y la originalidad teórica son características de las matemáticas puras que introdujo en estas investigaciones. Sus investigaciones en análisis dieron origen a importantes ideas, ofreciéndole al mismo tiempo cierta generalidad e independencia de juicio que le permitieron abordar el problema físico desde una nueva perspectiva. En un periodo marcado por la influencia de las disciplinas prácticas sobre las matemáticas, su obra muestra que esta influencia fue recíproca y que algunas veces innovaciones trascendentales en física fueron el resultado de la evolución interna de las matemáticas.

Notas

1. Véase por ejemplo [Kline, 1972, 497].
2. [Wilson 1985, 24-36].
3. Sternberg [1969, xvi].
4. Citado en [Wilson 1985, 205].
5. Por los retrasos en la publicación de las memorias académicas durante el siglo XVIII las fechas de publicación no son confiables para reconstruir el carácter de las investigaciones anuales de un individuo. En caso de Lagrange me he servido del *Inventaire chronologique* (1974) de Taton que es un resumen muy completo de su trabajo publicado con las fechas de presentación.
6. Oeuvres de Lagrange IV, 164-165.

Referencias

Airy, G. B. 1834, *Gravitation*, London.

Euler, L. 1749a, "Recherches sur le mouvement de corps célestes en général", *Mémoires de l'Académie de Berlin*. In *Opera Omnia* Ser. 2, V. 25, 1-44.

—— 1749b, "Pièce qui a remporté le prix de l'Académie royale des sciences en 1748 sur les inégalités de mouvement de Saturne et de Jupiter", *Académie royale de Paris*. In Euler's *Opera Omnia* Ser. 2, V. 25, 45-157.

Kline, M. 1972, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, New York, Oxford.

Lagrange, J. L. 1766, "Solutions de différens problèmes de calcul intégral", *Miscellanea Taurinensia* V. 3, 179-380. In *Oeuvres de Lagrange* I, 471-668.

— 1774, "Sur l'intégration des équations à différences partielles du premier ordre", *Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-lettres de Berlin 1772*, 353-372. In *Oeuvres de Lagrange* III 549-575.

—— 1776, "Sur les intégrales particulieres des équations différentielles", *Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-lettres de Berlin 1774*, 197-275. Leer octubre 12 y noviembre 9, 1775. In *Oeuvres de Lagrange* IV, 5-108.

—— 1777a, "Recherches sur les inégalités du mouvement des satellites de Jupiter causées par leur attraction mutuelle", *Recueil de piéces qui ont remporté les Prix de l'Académie royale des Sciences (Paris)*, 6th "piéce", 1-162. La memoria fue recibida el 31 de agosto 1765, y ganó el precio para el año 1766. En *Oeuvres de Lagrange* VI, 65-225.

—— 1777b, "Recherches sur les suites recurrentes dont les termes varient de plusieurs manières différentes...", *Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-lettres de Berlin 1775*, 183-272. Leer abril 29 y mayo 9, 1776. En *Oeuvres de Lagrange* IV, 151-251.

—— 1779, "Sur l'altération des moyen mouvements des planètes", *Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-lettres de Berlin 1776/1779*, 199-213. Leer octubre 24, 1776. En *Oeuvres de Lagrange* IV, 255-271.

Moulton, F. R. 1914, *An Introduction to Celestial Mechanics* (1914).

Sternberg, S. 1969, *Celestial Mechanics Part 1*, New York, W. A. Benjamin, Inc.

Taton, R. 1974, "Inventaire chronologie de l'oeuvre de Lagrange", *Revue Histoire des Sciences* 27/1, 3-36.

Watson, J. C. 1896, *Theoretical Astronomy Relating to the Motions of the Heavenly Bodies.*

Wilson, C. 1985, "The Great Inequality of Jupiter and Saturn from Kepler to Laplace", *Archive for History of Exact Sciences* 33, 15-290.

Boole y su semi-seguidor Jevons

Ivor Grattan-Guinness

1. El contacto entre Jevons y Boole

Es bien sabido que el nombre de un matemático vinculado a una teoría o resultado matemático frecuentemente no resulta lo más afortunado. Un caso interesante es el álgebra booleana, que ahora se considera una teoría algebraica abstracta definida por axiomas particulares, con interpretaciones como *álgebras booleanas* sobre dominios arbitrarios de objetos. Si bien algunas ideas básicas se deben a Boole, muchas otras características de las teorías modernas no corresponden a su concepción. El "álgebra booleana no es el álgebra de Boole", como señaló en 1981 Hailperin, a la vez que ponía de relieve varias diferencias.

Jevons es una de las razones por las cuales el álgebra de Boole difere del álgebra boolena. Sus aportaciones se centran en dos aspectos específicos del sistema de Boole, y en su correspondencia con él se refiere a ambos. El intercambio epistolar tuvo lugar entre el mes de agosto de 1863 y enero de 1864; en parte fue publicado en 1913 por Jourdain (usando exclusivamente las cartas de Boole) y pronto aparecerá toda la correspondencia en una próxima publicación (Grattan-Guinness, 1991) ... Jevons era entonces un joven de 28 años de edad, graduado en University College London [donde tomó cursos de matemáticas con Augustus De Morgan (1806-1871)] y que acababa de ser nombrado "tutor" en el Owens College Manchester. Boole tenía entonces 48 años de edad, y era un matemático conocido y de mucho prestigio. Ocupaba la cátedra de profesor de matemáticas en el Queen's College Cork en Irlanda. Era además autor de dos libros muy importantes y de varios trabajos sobre la lógica y sus aplicaciones a la teoría de la probabilidad; además, había escrito dos libros de texto y ensayos sobre ecuaciones diferenciales y en diferencias.

Mathesis 7 (1991) 351-362

Su trabajo en lógica no provocó una respuesta rápida; de hecho, podemos considerar que Jevons fue el primer crítico importante de dicho trabajo. En el momento de su contacto inicial con Boole, estaba terminando su primer libro, una obra corta titulada *Pure logic* (*Lógica pura*) que poco después se publicaría (Jevons, 1864). Envió las pruebas de imprenta de algunas páginas a Boole en agosto de 1863 y le pidió sus comentarios. Boole estaba demasiado atareado preparando la nueva edición de su libro de texto sobre ecuaciones diferenciales para concentrarse en este material; por la misma razón no leyó el libro cuando Jevons le envió un ejemplar en noviembre. No obstante, confrontó la posición de Jevons con la propia, según se advierte en las cartas.

Las dos principales publicaciones de Boole sobre la lógica fueron los libros *A mathematical analysis of logic* (1847) (*Análisis matemático de la lógica*) y *The laws of thought* (1854) (*Las leyes del pensamiento*). Su teoría cambió un poco en el lapso que media entre ambas obras, no así los aspectos centrales. A semejanza de lo que hizo Jevons, hablaré en este trabajo del segundo libro de Boole, limitándome exclusivamente a los aspectos del sistema que se expusieron allí y que se abordaron en la correspondencia o estaban implícitos en ella.

2. *El álgebra boolena de Boole versus la "lógica pura" de Jevons*

En su obra de 1854 Boole partió de las operaciones mentales, x, y, ..., que representaban términos como "hombres" o "europeos", que debían interpretarse de una manera intensional (pp. 28-31). Para aclarar la relación con la posición de Jevons me serviré de la interpretación que los considera como clases o como términos de la lógica. Boole usó una clase universal 1, dividiéndole después en subclases complementarias x y $(1 - x)$ (p. 48). Más tarde los medios de combinar las clases fueron explicados, algunas veces con retricciones; por ejemplo la sustracción $x - y$, por ejemplo, era definible sólo cuando (en términos de clase) x incluía a y (p. 33, con la interpretación lingüística de *salvo* o *excepto*).

La ley que distinguía el álgebra de Boole de las otras álgebras de la época era:

$$x^2 = x, \text{ con los corolarios } x(1 - x) = 0 \text{ y } x + (1 - x) = 1, \qquad (1)$$

donde el producto se entendía como la intersección de clases y la adición como su unión (pero definida sólo en ciertas condiciones, que se expondrán más adelante, y que serían el motivo fundamental de discu-

sión con Jevons). Con una decisión poco afortunada, que habría de generar mucha confusión, llamó "ley de la dualidad" tanto a $(1)_1$ como a $(1)_2$ (consúltense, por ejemplo, las páginas 55 y 49-51).

Para Boole 'el símbolo +' era 'el equivalente de las conjunciones "*y*", "*o*". Sin embargo, 'la expresión $x + y$ parece en realidad ininterpretable, a menos que se suponga que las cosas representadas por x y las representadas por y son enteramente distintas; o sea que no abarcan individuos en común' (1854, 55, 66). La especificación de las uniones y las clases no disjuntas x y y, correspondientes a los sentidos exclusivo (excluyente) e inclusivo de '*o*', exigía las definiciones intermedias de clases disjuntas:

$$(x(1 - y) + y(1 - x)) \text{ o } (x + y(1 - x)) \qquad (2)$$

según se requieran (p. 57). Expresó después las premisas en términos de sumas y productos, y encontró varios teoremas de expansión y técnicas de eliminación para obtener las consecuencias.

Conforme a la costumbre de los algebristas innovadores del siglo XIX, Boole estaba ampliando conscientemente el dominio de las álgebras; pero no por ello olvidaba las propiedades del álgebra común que había nacido como una generalización de la aritmética. Así, definió las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división, dándoles esos nombres porque cumplían leyes (bastante) semejantes a las de sus versiones tradicionales. Sin embargo, las semejanzas tenían un límite; en particular, su restricción de "+" a las clases disjuntas constituía una debilidad del sistema, además de que no demostró por qué era esencial. Fue éste el punto principal de desacuerdo con Jevons.

Jevons trabajaba con *términos*, es decir, con "cualquier combinación de nombres y palabras que describan las cualidades y circunstancias de una cosa" (1864, 26, 6); una proposición "es una afirmación de la igualdad o diferencia de significado entre dos términos" que deben escribirse $A = B$, donde "=" se lee como *es* (pp. 8-9). Representó *y combinando* los términos A y B de un modo booleano para producir AB (p. 15). En su libro y también en su correspondencia, aceptó la ley $(1)_1$ (como una ley satisfecha por los términos), pero le cambió el nombre por *ley de la simplicidad*; en el libro también asignó el nombre de Boole a otra ley (*1864*, 15, 36).

El principal cambio que Jevons introdujo en el sistema de Boole consistió en rechazar la restricción de "+" a las clases (o términos) disjuntas, y sostener que nuestro uso del lenguaje [en el inglés] permitía

definir la unión completa de las clases que se intersectan (o términos que se superponen o traslapan). "*B* o *C* es un término plural [...] porque su significado es el de *B* o el de *C*, pero sin que se sepa cuál" (p. 25). Esta explicación parecía permitir tanto la disyunción inclusiva como la exclusiva de los términos, pero en los ejemplos de las páginas 76-77 utilizó el sentido inclusivo (como en la proposición "los graduados académicos son bachilleres, licenciados o doctores"). Su *ley de unidad* para un término A permitía que

$$A + A = A \qquad (3)$$

es decir, dos (y, por tanto, cualquier número) autodisyunciones de *A* pueden ser reducidas a una sola *A*, sin que cambie su significado. De ahí que la alternación lógica sea diferente de la adición matemática.

La ley (3) "no fue admitida por el profesor Boole cuando formulaba los principios de su sistema", escribió Jevons (p. 26). Expresó sus "Objeciones" al sistema de Boole en el último capítulo, el 15, que contenía "Observaciones sobre el sistema de Boole y sobre la relación entre lógica y matemáticas". La primera objeción era que: "*la lógica de Boole* [...] *no es la del pensamiento común*" (p. 76); la segunda afirma que "*que en lógica pura no existen operaciones como adición y sustracción*", mientras que en la tercera señalaba específicamente que el sistema de Boole "*es incompatible con la autoevidete ley del pensamiento* [(3)]" (pp. 79, 83).

Este cambio a (3), y el deseo de Jevons de no recurrir a procedimientos que se parecieran a los de las matemáticas, lo llevaron a idear otros métodos de obtener las consecuencias (a las que llamó *inferencias*). La descripción de los detalles será breve, dado que éstos no se trataron en la correspondencia con Boole.

Jevons se valió de dos métodos. La *inferencia directa* se basaba en la transitividad de los términos igualados en las premisas; por ejemplo, de $A = B$ y de $B = C$, podía inferirse $A = C$ (pp. 10-13). En el más poderoso método de *inferencia indirecta*, formaba todas las combinaciones lógicas posibles de los términos simples incluidos en las premisas, junto con los términos contrarios. (Empleó la notación de su exmaestro De Morgan, considerando x como el término contrario de X.[1]) Combinó estos términos compuestos con los dos miembros de cada premisa y retuvo sólo aquellos términos que o eran consistentes con los dos de al menos una premisa o que contradecían a los dos miembros de todas ellas. Las consecuencias se extraían tomando un término simple o compuesto cualquiera (t, por ejemplo) y haciéndolo igual a la suma (en su sentido de "+") de todos los tér-

minos retenidos de que formaba parte. En otras palabras, descubrió el término plural al que según las premisas *t* era igual ("="). Se disponía de leyes básicas como $(1)_1$ y (3), así como de varias reglas de eliminación (que no se describen aquí), con las cuales se podían simplificar las proposiciones resultantes (pp. 42-53). He aquí un ejemplo (tomado de la página 60), a partir de sólo la premisa $A = B + C$ se disponía de ocho términos compuestos tales como *Abc*; éste era uno de los cuatro que habían quedado excluidos por contener *A* pero no *B* ni *C* o bien por contener *B* o *C* pero no *A*. Se conservaron los otros cuatro, *ABC*, *ABc*, *Ab C* y *abc*, y se incluyeron las consecuencias

$$a = bc \text{ y } b = Ab\,C + abc = Ab\,C + a \qquad (4)$$

Este procedimiento de selección y observación era bastante tedioso. Con el propósito de hacerlo más eficiente Jevons diseñó su *ábaco lógico* que se describe en el trabajo *1866*, compuesto de una colección de fichas donde estaban anotadas todas las combinaciones de términos y sus negaciones; se escogieron las fichas correspondientes a las premisas y las consecuencias se suprimieron en la forma antes mencionada. Jevons se dio cuenta de que la selección y la valoración podrían efectuarse mejor en una forma no manual, y con tal fin introdujo en su trabajo de *1870* su *máquina lógica* (consúltese a Mays y Henry, *1973*).

En su correspondencia Boole y Jevons tomaron como un "caso de prueba" el ejemplo de $x + x$. Para Jevons cumplía satisfactoriamente la condición (3); según Boole no era interpretable, aunque en su sistema se concluía que la ecuación $x + x = 0$ era reducible a $x = 0$ al aplicar el teorema de expansión general para una función general a unas funciones generales $\varnothing(x)$

$$\varnothing(x) = \varnothing(0) + \{\varnothing(1) - \varnothing(0)\}\, x = \varnothing(1)x + \varnothing(0)\,(1-x)^2 \qquad (5)$$

Específicamente, la aplicación de (5) (incluida en Boole *1854*, 72-73) a la ecuación $x + x = 0$ produce

$$2x + 0(1-x) = 0; \text{ esto es, } 2x = 0 \qquad (6)$$

Esta ecuación por sí misma no es interpretable, pues su único coeficiente no es 0 ni 1; pero conforme a uno de los lemas de Boole (pp. 90-91), $x = 0$ se deduce como parte adjunta de la interpretación (es decir, se hace que el término asociado, *x*, sea *0*).

En la correspondencia epistolar Jevons en forma algo cortés erró en cuanto a representar fielmente la posición de Boole al interpretar $x + x$ y de $x + x = 0$ como algo que correspondía a su ley de la unidad (3). Pero ello no le impidió juzgar totalmente inaceptable la aparición de coeficientes como *2* en el álgebra. Más tarde, impugnó los dos *axiomas* de Boole que establecían que, cuando a *cosas iguales* se les sumaban o restaban *cosas iguales*, los resultados eran iguales (*1854*, 36): para Jevons el *axioma* de sustracción era en realidad falso, tal como él entendía la operación.

Jevons también pensaba que, para un entero cualquiera *n*, $x^n = x$ es igualmente verdadero cuando $x^2 = x$'. Pero Boole sostenía que tales leyes no eran interpretables, puesto que la factorización de la ecuación producía el término $(1 + x)$ [(que era *más* que el universo) o bien el término $(-1 - x)$ (cuyo constituyente –1 no satisfacía $(1)_2$)] (*1854*, 50, para el caso $n = 3$).

Otra importante discrepancia de Jevons (relacionada) con la posición de Boole consistió en disminuir la analogía con la aritmética. La interpretación revisada de "+" constituía un aspecto de esta tedencia, cuya finalidad era alejarla de cualquier tipo de adición aritmética o algebraica; y "-" debía eliminarse por completo. Otro punto de ataque fueron los papeles jugados por 0 y 1, que tan importantes eran en la perspectiva de Boole. Por ejemplo, la cuarta objeción de Jevons era que los símbolos 1/1, 0/0, 0/1 y 1/0, que Boole admitía como posibles valores de los coeficientes en los teoremas de expansión como (4): "*no estabecen para sí mismos significado lógico alguno*" (*1864*, 82); por tanto, se debía abandonar también la división, lo mismo que los métodos relacionados con ella.

Jevons subtituló su libro *La lógica de la calidad separada de la cantidad*, y subrayó que era preciso reducir las conexiones con la cantidad. "Las formas de mi sistema pueden, en realidad, obtenerse despojando el sistema [de Boole] de su ropaje matemático que, por señalar lo mínimo, no resulta algo ser esencial" (p. 3). Sin duda exageró su posición porque su sistema sigue siendo muy algebraico (tomado en parte de De Morgan, según se señaló con anterioridad) y, por lo mismo, matemático desde ese punto de vista. Pero diluyó de manera considerable el componente matemático y el choque de las posiciones era inevitable tanto desde el punto de vista técnico como filosófico.[3] En particular, en Boole la lógica era matemáticas aplicadas (nótese, por ejemplo, el título de su primer libro); por el contrario, Jevons llegó a la conclusión de que "la lógica no es parte de las matemáticas, como casi está implícito en

los escritos del profesor Boole, sino que más bien las matemáticas provienen de la lógica" (p. 3: compárese su texto de *1874*, 191-192), lo cual sugiere una relación inversa entre lógica y matemáticas. En efecto, esto parece presagiar los logicismos de Frege o los del propio Russell pero era sólo una especulación y no influyó ni a Frege ni a Russell. Así, Frege (*1884*, arts. 35-36, 44) criticó las definiciones de los números que Jevons había formulado en términos de diversidad.

3. El lugar de De Morgan

Conviene presentar un breve comentario sobre De Morgan. En septiembre de 1863 Jevons le envió el borrador de un manuscrito; y el 15 de septiembre, al recomendarle abreviarlo, De Morgan se refiere a dos libros de Boole: "El señor Boole comenzó con una breve obra [*1847*] que fue muy leída; más tarde publicó su obra más extensa [1854] que fue menos leída y que nadie habría leído de no haber sido porque antes apareció la obra menos extensa". En realidad, Jevons era un ejemplo concreto que desdecía esta aseveración en tanto que se limitó al segundo libro de Boole —como ha sucedido con tantos otros lectores desde entonces. Al parecer en el momento en que De Morgan escribió esta carta este libro empezaba a ganar ascendencia sobre el primero.

De Morgan había emprendido la tarea de ampliar la lógica silogística, especialmente con una lógica de relaciones. Conviene señalar que Jevons no hizo el menor intento por desarrollar esas ideas de su exprofesor, aun cuando en la carta de septiembre antes citada De Morgan le preguntó si había leído su texto de *1860* sobre relaciones y ofreció enviarle una separata.[4] Por lo demás, en los siete años que todavía vivió, De Morgan no parece haber discutido la *Lógica pura* de Jevons después de su publicación. Tampoco Boole mostró gran interés por la obra de De Morgan; su extensa correspondencia con De Morgan, en que se habla del pasado, se publicó en la recopilación de Smith de *1982* (consúltese Corcoran *1986*).

Las diferencias entre los diversos sistemas fueron señaladas por el propio Jevons en una carta del 9 de enero de 1864 dirigida a De Morgan, que el destinatario introdujo en su ejemplar de *Pure Logic*. Luego de disculparse por no haber representado fielmente las proposiciones de De Morgan en la página 57 (donde debería leerse $b = \cup A$ y $\cup a = \cup b$, respectivamente), Jevons agrega:

> Mi única excusa es que pensar y trabajar en dos o más sistemas distintos (como lo hago yo) resulta mucho más difícil que utilizar exclusivamente un conjunto de formas y operaciones.
> Ello puede asimismo explicar la calidad inferior del último capítulo [dedicado a Boole]. Hice que se imprimiera en forma un poco diferente a fin de distinguirlo del resto. No puede pretender haber penetrado en lo profundo del sistema de Boole, pues son muy oscuros y complejos los caminos que de manera extraordinaria recorrió para dar con sus hallazgos. Pero estoy seguro de que usted aceptará que su supuesto de los términos exclusivos es contrario al procedimiento [*sic*] del pensamiento ordinario.[5]

4. Boole y sus semiseguidores

Durante el útimo cuarto del siglo XIX Jevons fue seguramente el autor más popular de lógica en lengua inglesa publicando libros de diversos grados de dificultad con la editorial Macmillan. No siempre puso de relieve el enfoque booleano, ni siquiera en su propia versión; por ejemplo, su popular *primer* versión de *1876* se aparta poco del ámbito silogístico. Sin embargo, advirtió con toda claridad el cambio tan radical que Boole había introducido en la lógica y del cual se consideraba un continuador. En 1869 expresó su opinión a Macmillan, la casa editora que publicó todos sus libros después de *Pure Logic*: "temo que transcurrirán muchos años antes que el viejo silogismo sea desplazado y que se introduzcan símbolos como los propuestos por Boole en los programas ordinarios de enseñanza". [6]

Algunos partidarios de la nueva lógica algebraica preferían la versión de Boole a la de Jevons. Por ejemplo, G. B. Halstead (*1878*) escribió desde Estados Unidos a la revista *Mind* defendiendo el sistema de Boole, en especial su capacidad para expresar tanto los tipos inclusivos como los exclusivos de disyunción a través de (2); asimismo, rechazaba la asociación que Jevons había hecho del enfoque o planteamiento matemático de Boole con un álgebra de la cantidad.

El defensor más decidido de Boole fue John Venn, para quien las reformas propuestas por Jevons significaban que "prácticamente se desecha lo más característico y atractivo en el sistema" [de Boole] (Venn *1881*, xxvii) [...]. He hecho todo lo posible por averiguar la relación que según Jevons existe entre su exposición sobre el tema y la de Boole, pero sin éxito (p. xxviii); sin embargo, estaba seguro de que la adhesión de Jevons a las intensiones daban origen a varios "males", entre ellos "la catástrofe" de no leer extensionalmente determinadas proposiciones (p. 36).[7]

Pese a la fama del libro de Venn, poco a poco el tipo de enfoque propuesto por Jevons empezó a generalizarse.[8] La tendencia a alejarse de las matemáticas es evidente en, entre otros textos de autores dedicados a la lógica, el ensayo de Johnson titulado *The logical calculus* (*Cálculo lógico*) que revistiera una gran influencia para la posteridad, y donde imitó a Jevons al reducir el nexo matemático sustituyendo, por ejemplo, "1" y "0" por "Truismo" y "Falsismo" (*1892*, 342-343).

Bajo la influencia de Jevons, Johnson, Peirce, Venn y otros semi-seguidores, el enfoque algebraico de Boole a la lógica fue adquiriendo poco a poco mayor importancia. Sin embargo, algunos de sus conceptos y procedimientos fundamentales fueron abandonados o modificados: no sólo su lectura de "+" sino también su énfasis en la (in)interpretabilidad de las funciones y ecuaciones lógicas, su interés por resolver las ecuaciones lógicas y nociones tales como 0/0 y 1/0 que se usan para obtener las soluciones.

Algunos aspectos de la lógica moderna y del álgebra booleana en realidad no se deben a Boole ni a Jevons. Por ejemplo, la prioridad en cuanto a la interpretación tan importante del álgebra booleana como cálculo proposicional recae en MacColl, a fines de la década de 1870 (véase especialmente su obra de *1880*; un comentario se encuentra en Jourdain *1912*, 219-223). Boole manejó *proposiciones hipotéticas* en *1847* al emplear un universo global que abarcaba todos los casos que Prior (*1949*) ha demostrado que no son viables. Y en *1854*, caps. 11-12, formuló una teoría de *proposiciones secundarias* en la cual fundamentó su existencia en el lapso de tiempo en que se conservaba su verdad o falsedad. Jevons prefirió concentrarse en su análisis de los términos.

Otros cambios relativos a la creación de *nuestra* álgebra booleana se deben a la influencia de otros ámbitos de la matemática. Por ejemplo, Boole aplicó una teoría de colecciones basada en la relación parte/todo y no en *nuestra* teoría cantoriana de los conjuntos, en la cual se distinguen la pertenencia y la inclusión.

Boole no formuló un álgebra de la cantidad como la que supuso Jevons y tampoco elaboró un álgebra *abstracta* como la entenderíamos hoy. Por su parte, Jevons no expresó sus objeciones en términos de una propuesta de un álgebra alternativa. Ambos estaban analizando las leyes del pensamiento, y Jevons creyó que Boole estaba *equivocado* (en los aspectos antes señalados). La concepción de las álgebras abstractas como sistemas formales diferentes con (quizá) diversas interpretaciones sobre los dominios y el nacimiento de la axiomática dentro de las matemáticas tuvieron lugar en los últimos treinta años del siglo XIX; sus orí-

genes se remontan a la teoría de grupos y al afán por completar los axiomas de la geometría euclidiana. Las leyes en la tradición del álgebra de la época de Boole no son las mismas que los axiomas como los entendemos hoy; de hecho, Boole buscó las conclusiones (o, como lógico, las consecuencias) de sus supuestos más que las líneas de razonamiento y de la deducción correspondientes, y ni siquiera especificó todas las leyes que de hecho utilizó (consúltese a Corcoran y Wood *1980*; o a Hailperin *1986*, pt. 1 *passim*).

Reconocimientos

Quiero agradecer a la The University of London Library y a la British Library en lo tocante a las cartas que Jevons envió a la editorial Macmillan y a De Morgan, respectivamente. Agradezco a W. Mays, a T. Hailperin y a J. Corcoran por los comentarios que hicieron al borrador de este trabajo.

Notas

1. De Morgan explicó su notación en varios pasajes; por ejemplo, "En este trabajo utilizaré las minúsculas *x, y, z* y *c* para designar los nombres contrarios a los representados por las mayúsculas *X, Y, Z* y *C*" (*1846*, art. 1). Jevons prefería la mayúscula romana *X*, pero por lo demás adoptó la misma posición, que incluía cierta *simetría* de función entre *X* y *x*.

2. En *1854*, 76 Boole dedujo una versión de $(1)_3$ a través de este teorema, así como el desarrollo de la función 1.

3. Los sistemas de Boole y de Jevons se comparan en Liard *1878*, caps. 5-6; y en Hailperin *1986*, 118-121.

4. No obstante el evidente desinterés de Jevons por la innovación de De Morgan, sus relaciones siguieron siendo buenas: el 9 de enero de 1865 De Morgan recomendó a su exalumno para una cátedra (de medio tiempo) en el Queen's College Liverpool, que Jevons obtuvo finalmente. Estas dos cartas se conservan entre los Jevons Papers en los archivos de la University of Manchester (llamadas JA6/2/114 y JA6/49/7). Véase la siguiente nota a pie de página.

5. Jevons menciona más adelante dos fuentes donde se utilizan términos "no exclusivos". Termina ofreciendo otra vez disculpas por no haber advertido en la página 69 la evidente simplificación de A = BC (DE + De + dE) a A = BC (D+E) y, en consecuencia, por no haber señalado "el defecto de los símbolos de Boole al no admitir la expresión $D + E$ en este caso". La diferencia de la composición tipográfica del último capítulo a que se refiere es que se dejó menos espacio entre las líneas del texto que en el resto del libro.

Esta carta fue una respuesta a la carta de De Morgan con fecha de 4 de enero de 1864, la cual se conserva en los Jevons Papers (nota 4), llamadas JA6/2/1145. Como de costumbre, no se encuentra en Jevons *Papers*, aunque alude a ella en la carta enviada al día siguiente a su hermana Lucy en vol. 3 (1977), 34-35 (y publicada inicialmente en Jevons *1886*, 195).

6. Jevons a Macmillan, 16 de febrero 1869. El archivo de cartas se conserva en la British Library (London), Add. Ms. 55173: ésta en particular tampoco se encuentra en los Jevons *Papers*.

7. Las cinco cartas de Jevons a Venn se conservan en el archivo C45 de los documentos de Venn, Gonville and Caius College, Cambridge, y las cuatro correspondientes a su respuesta se encuentran en Jevons *Papers* (nota 4), llamadas JA6/2/358-361. Ninguna de ellas figura en Jevons *Papers* desde luego, pero la carta de Jevons con fecha 26 de marzo de 1876 fue publicada en Jevons *1886*, 349-352. Pertenece a un intercambio donde Venn defendió el planteamiento de Boole, argumentando (como Halstead *1878*) que (2) ofrecía los dos sentidos de *o*, y Jevons expresó su entusiasmo por la obra de Boole.

8. La historia de la aceptación y adopción del álgebra de Boole requiere un trabajo más amplio de investigación. Para recabar información general consúltese a Jørgensen *1931 passim*; Church *1956*, 155-166; Styazhkin *1969*, cap. 5; y Dipert *1978*.

Bibliografía

Se pone asterisco a una edición que se cita por *número de página* en el texto.

Boole, G. *1847 The Mathematical analysis of logic* ..., Cambridge [Macmillan, Barclay and Macmillan). También en *1952*, 49-124 [con adiciones]. [Reimp. 1948, Oxford (Backwell.)]

——*1854 The Laws of thought*..., London (Walton and Maberley). [Reimpr. 1958, New York (Dover).]

——*1952 Studies in logic and probability* (ed. R. Rhees), London (Watts)

Church, A. *1956 Introduction to mathematical logic*, Princeton (University Press).

Corcoran, J. *1986* "Correspondence without communication", *Hist. phil. logic*, 6, 65-75.

Corcoran, J. y Wood,S. *1980* "Boole's criteria of validity and invalidity", *Notre Dame J. Formal Logic*,21, 609-638.

De Morgan, A. *1846* "On the syllogism. I...", *Trans. Cambridge Phil. Soc.*, 8, 379-408. También en *1952*, 1-21.

—— *1860*, "Logic", en *English cyclopaedia*, vol. 5, 150-164. [Parte también en *1952*, 247-270*].

—— *1952 On the syllogism., and other writings* (ed. P. Heath), London (Routledge and Kegan Paul).

Dipert, R. *1978* "Development and crises in late Boolean algebra: the deductive logics of Peirce, Jevons and Schröeder", Disertación doctoral de filosofía (University of Illinois).

Frege. F.L.G. *1884 Die Grundlagen der Arithmetik*, Breslau (Körber). [Varias reimpresiones y traducciones.}

Hailperin, T. *1981* "Boole's algebra isn't Boolean algebra", *Math. mag.*, 54, 172-184. [Véase también le reseña en *Math. rev.*, 83e, no. 01038.]

—— *1986 Boole's logic and probability*, 2nd ed., Amsterdam (Nort Holland).

Halstead, G.B. *1878*. "Professor Jevons's criticism of Boole's logical system", *Mind*, 3, 134-137. [Réplica breve y no desarrollada de Jevons en pp. 286-287.]

Hesse, M., *1952* "Boole's philosophy of logic", *Ann. sci.*, 8, 61-81.

Jevons, W. S. *Papers and correspondence*, 7 vols. (ed. R.D. Collison Black y otros), London (Macmillan).

—— *1864 Pure logic, or the logic of quality apart from quantity*, London (Stanford)*. Véase también su *1890*, 1-77.

—— *1866* "On a logical abacus", *Qu. j. pure appl. maths.*, (1) 5, 161-165.

—— *1870* "On the mechanical performance of logical inference", *Phil. trans. Roy. Soc. London*, 160, 497-518. Véase también su *1890*, 137-172.

—— *1876 Logic*, 1st ed., London (Macmillan). [Varias ediciones y reimpresiones posteriores.]

—— *1886 Letters and journal* (ed. H. A. Jevons), London (Macmillan).

—— *1890 Pure Logic and other writings* (ed. R. Adamson y H.A. Jevons), London (Macmillan).

Johnson, W.E. *1892* "The Logical calculus", *Mind*, n.s., 1, 3-30, 235-250, 340-357.

Jourdain, P.E.B. *1913* "The development of the theories of mathematical logic and the principles of mathematics", part 3, *Qu. j. pure appl. maths.*, 44, 113-129. Véase también en *1991*, 229-244.

—— *1991 Selected essays on the history of set theory and logics (1906-1918)* (ed. I. Grattan-Guinness), Bologna (CLUEB).

Jørgensen, J. *1931 A treatise of formal logic*, vol.1 Copenhagen y London (Levin y Munksgaard). [Reimp. 1962, New York (Russell y Russell].

Laita, L.M. *1979* "Influences on Boole's logic: the controversy between William Hamilton and Augustus De Morgan", *Ann. sci.*, 36, 45-65.

Liard, L. *1878 Les logiciens anglais contemporains*, París (Baillière).

Mays, W. y Henry, D.P. *1973* "Jevons and logic", *Mind*, n.s. 62, 484-505.

MacColl, H. *1880* "Symbolic reasoning", *Mind*, (1) 5, 45-60.

Prior, A.N. *1949* "Categoricals and hypotheticals in George Boole and his successors", *Austral. j. phil.* 27, 171-196.

Smith, G. *1982* (Ed.) *The Boole-De Morgan correspondence*, Oxford (Clarendon Press).

Styazhkin, N.I. *1969 From Leibniz to Peano: a concise history of mathematical logic*, Cambridge, Mass. (MIT Press).

Thomson,W. *1842 Outline of the necessary laws of thought*, 1st. ed., [Varias ediciones posteriores.)

Venn, J. *1881 Symbolic logic*, 1st. ed., London (Macmillan).

¿Qué es y qué debería ser el cálculo?*

Ivor Grattan-Guinness

La enseñanza del cálculo rara vez incluye su historia. Por eso las tradiciones antagónicas de los términos, notaciones e ideas se exponen en forma parcial y sin que hayan sido bien asimiladas. Este trabajo contiene en las secciones 1-6 un breve resumen de los progresos logrados en el cálculo desde Newton y Leibniz hasta Lebesgue y Zermelo (es decir de la década de 1660 a la de 1900). La sección 7 contiene diversos puntos sobre cuestiones educativas.

> Supongo que los que han estudiado un poco la historia del análisis matemático no dudarán que éste se ha desarrollado de modo ordenado. Tampoco dudarán que ese orden ha sido, en gran medida, necesario, estando determinado ya fuera por etapas de la deducción lógica o por la introducción gradual de nuevas ideas y concepciones cuando el momento propicio para su evolución hubiera llegado. Y se trata de causas que operan en perfecta armonía. Cada nueva concepción científica da origen a nuevas aplicaciones del razonamiento deductivo; pero las aplicaciones no son posibles más que a través de los métodos y procesos que pertenecen a una época anterior ... Ahora bien, ésta es la razón que sustenta el que el orden de exposición corresponda a la sucesión cronológica de los descubrimientos: al proceder de esa manera seguramente presentaremos cada nueva forma de verdad precisamente en la etapa en que la mente está más preparada para recibirla o incluso, a semejanza del descubridor, para salir a su encuentro. Entre la multitud de formas que adopta una cultura falsa, el ocuparse demasiado prematuramente de las abstracciones con toda probabilidad perjudicará de modo irreparable el crecimiento del vigor masculino del intelecto.
>
> **Boole *1859*, prefacio**

* © "What Was and What Should Be the Calculus?" *Cahiers D'Histoire et de Philosophie des Sciencies*, No. 21 (1987) pp. 116-135. [*History in Mathematics Education. Proceedings of a workshop held at the University of Toronto, Canada. July-August 1983.* Editados por Ivor Grattan-Guinness].

1. ¿Qué introdujeron Newton y Leibniz en el cálculo?

"Newton y Leibniz inventaron el cáculo", señalan la historia y los libros de texto y luego señalan al "teorema fundamental", el principio que nos dice que la diferenciación y la integración son procesos inversos, como la principal fuente de progreso:

$$[d/dx] \int f(x)dx = \int d/dx\, f(x)dx = f(x) \qquad (1.1)$$

como se expresa mediante el simbolismo moderno. Sin embargo, esto no es más que parte de su aportación y, en todo caso, la segunda parte. En efecto, los dos matemáticos fueron los primeros en comprender que la finalidad del cálculo es encontrar *nuevas funciones* o *relaciones* de las variables a partir de determinada función o relación: $df(x)/dx$, o bien algún análogo, para la diferenciación, y la función integral *in*definida $\int f(x)dx$ para la integración. Sin esos conceptos, (1.1) cae en la falsedad.

$$0 = f(b) - f(a) \text{ (digamos)} = f(x). \qquad (1.2)$$

Antes de Newton y Leibniz, el cálculo se ocupaba exclusivamente de obtener determinados *valores* de las funciones (como puntos de optimización o puntos tangentes dados por condiciones de raíz doble) o de evaluar algunas clases particulares de áreas y volúmenes (véase Whiteside *1961* y Pedersen en mi texto de *1980*, 10-48).

El cálculo de Newton, que evolucionó en la década de 1660 y alcanzó una forma casi definitiva en la década de 1690, adoptó como concepto diferencial básico la "fluxión" de x de una variable x. Intuitivamente fue concebida en términos de la razón de cambio de x respecto de alguna variable temporal subyacente t:

$$x(t) = \text{'}lim\text{'}_{\sigma \to 0} \left((x(t + \sigma) - x(t))/\sigma\right); \qquad (1.3)$$

pero los fundamentos del proceso de tomar límites quedaban en la oscuridad y las comillas sobre 'lím' han de tomarse seriamente. Por el contrario, como bien se sabe, la famosa controversia en torno a *The Analyst* de Berkeley (*1734*) se centró en parte en esta cuestión (véase a Cajori, *1919*).

Las razones de flujo de las variables eran relativas entre sí; por ejemplo, si se duplicaban todas en un problema, no se modificaba el problema. Por tanto, dado un incremento o en t, el incremento ox se tomaba en x; de lo contrario se utilizaban las razones y/x de los flujos. La frase de Newton *razones primeras y últimas* se refería a estas razones y también expresaba su suposición de que el valor límite alcanzado desde abajo del punto dado era igual al alcanzado desde arriba (en lenguaje moderno, las derivadas por la derecha y la izquierda son iguales). Entre estos flujos, el caso en que $x = 1$ tenía especial importancia, ya que proporcionaba la referencia de base para los demás. Volveremos a ocuparnos de este punto en la sección 2.

La versión de la integral indefinida dada por Newton fue su "fluente" x de la variable x. Así, el principio de inversión (1.1), si alguna vez lo hubiera escrito específicamente, habría adoptado la forma

$$x = x = x. \tag{1.4}$$

Entre sus motivaciones meramente matemáticas, Newton se sentía muy atraído por la diferenciación e integración término a término de series de potencias (para utilizar una forma moderna de expresión). Fue el primer gran matemático en afirmar la prominencia de las series de potencias en la matemática especialmente por su capacidad de expresar la ecuación de curvas; sus técnicas de cálculo encontraron luego nuevas curvas a partir de la diferenciación y la integración.

Las más importantes fuentes de los escritos de Newton sobre cálculo son actualmente la edición de sus *Papers*, preparada por D. T. Whiteside. Los volúmenes 1 y 2 (1664-1670) contienen los primeros trabajos, y el volumen 4 (1674-1684) contiene algunos textos muy interesantes de sus escritos posteriores.

El enfoque de Leibniz, desarrollado en la década de 1670, fue muy diferente, pues toma una variable x no en su (una especie de) valor límite, sino sólo hasta un *caso diferencial* dx, un incremento infinitesimal de x y *de la misma dimensión que x; dx* era tambien una variable que podía tomar un incremento de segundo orden para producir ddx, etc. Una vez más, las razones de cambio contenían un grado de libertad y realmente se relacionaban con alguna variable base; para él 'dy/dx' significaba literalmente una razón de diferenciales $dy + dx$ y 'd^2y/dx^2 era $ddy/(dx)^2$. Algunas veces tomó en cuenta incrementos uniformes donde dx era constante y por lo tanto $ddx = 0$. Esta categoría correspondía al caso de x = 1 considerado por Newton.

La integral de Leibniz era la suma $\int x$, un valor infinitamente grande de la variable x, y una vez más con la misma dimensión que x. Pero el objeto al que concedió atención primordial fue, por supuesto el área $\int y dx$, que concibió como la sumatoria ($\int$) (*in*definida) de áreas de los rectángulos de alto y y ancho dx (si y y x se tomaban como variables lineales).

Para Leibniz el principio de inversión no tomaba la forma (1.1), que *parece* estar escrito en su notación, sino la forma

$$d \int x = \int dx = x; \tag{1.5}$$

el cálculo era una teoría de los operadores d y $\int$ actúan sobre variables como x al tiempo que conservan la dimensión. La comprensión del principio la logró estudiando lo que más tarde llamó "el triángulo característico" del cociente de diferencias y señalando que la pendiente de la tangente $dx + dx$ estaba dada por la diferencia de valores de las ordenadas, en tanto que el área $\int y dx$ se obtenía sumando esas ordenadas.

El cálculo de Leibniz no se encuentra en una satisfactoria versión inglesa, aunque existe una edición (Child *1920*) de sus primeros escritos matemáticos. La génesis de su teoría se describe detalladamente en Hofmann *1949* y en Bos *1974*. En la sección 7.3 se ofrece una evaluación de sus logros contrastándolos con el análisis no estándar.

2. *Euler y el coeficiente diferencial*

La tradición leibniziana fue la que tuvo más éxito de las dos. Suele aducirse como razón la "notación tan compleja" de Newton; pero esta explicación no es convincente puesto que es posible dominarla en unos cuantos minutos (de hecho, la notación de puntos siempre se ha empleado en dinámica). El sistema de Leibniz es un poco más eficaz, con sus intuitivas y flexibles notaciones de pequeñas (o muchas) variables; pero la razón fundamental de su superioridad consiste, a mi juicio, en la calidad de sus sucesores, la familia Bernoulli y Euler.

El cálculo adquirió gran parte de su importancia por su aplicación a la geometría y a la mecánica, cuando las ecuaciones diferenciales, tanto ordinarias como parciales fueron planteadas y resueltas. (Por aquella época, por "ecuaciones diferenciales" se entendían literalmente ecuaciones que relacionaban diferenciales; resulta absurdo que todavía hoy se conserve esa expresión.) Euler fue el más productivo de los seguidores de Leibniz;

y no sólo amplió gradualmente el alcance de la disciplina sino que además perfeccionó sus fundamentos en un aspecto importantísimo.

Un problema de cálculo incluía algunas variables $x, y, z, \ldots$, con sus diferenciales $dx, dy, dz, \ldots ddx, \ldots$ variando juntas con cierto grado de indeterminación. Se deducía entonces que la forma de las expresiones que contenían diferencias por encima del primer orden (el radio de curvatura, por ejemplo) dependía de las condiciones particulares aplicables a su cálculo (por ejemplo, qué diferencial era constante); pero tales condiciones actuaban no sólo como un sobrepeso inconveniente, sino que además posiblemente no eran aplicables en otro contexto.

Euler codificó la práctica de especificar diferenciales uniformes y de definir otras diferenciales a partir de ellas; de ese modo eliminó la indeterminación. Tomaremos el caso más simple de dos variables x y y, y cuyas diferenciales se relacionan como sigue:

$$dy = p\,dx; \text{ y especificando que } ddx = 0 \qquad (2.1)$$

p, como y, es una función de x; y por tanto, como en (2.1),

$$dp = q\,dx\,, \text{ y así sucesivamente.} \qquad (2.2)$$

Entonces la diferencial de segundo orden ddy se calcula como sigue:

$$ddy: = d(dy) = d(pdx) = dpdx + pddx = q(dx)^2 + 0 = q(dx)^2, \qquad (2.3)$$

y, por tanto, se compone de dos cantidades determinadas q y $(dx)^2$ (Euler *1755*, arts. 124-130).

$p, q, \ldots$ eran los *coeficientes diferenciales* de y respecto a x; y por lo mismo un componente importante de funcionalidad pasó a formar parte del cálculo, ya que la variable x que satisfacía la relación $(2.1)_2$ estaba desempeñando el papel que llamaríamos de "variable independiente", con y dependiendo funcionalmente de ella (consúltese a Bos *1974*, 66-77). Algunas veces se refirió al cálculo como un proceso de "hacer frente a los ceros", pero de ninguna manera estaba *fundamentado* en una teoría de límites. Así, la integral *se definía* como la inversa, de modo que $f(x)$ era la integral de p, p de q y así sucesivamente.

Euler y otros desarrollaron enormemente el cálculo durante el siglo XVIII; la extensión al caso de muchas variables con sus diferenciales *parciales* y las ecuaciones diferenciales, tuvo una gran trascendencia. (Un

ejemplo del método se da en el párrafo 7.4). También hizo aportaciones como ningún otro a la teoría de funciones, series e integrales, y con ello aportó muchos resultados específicos que podrían ser aplicados a determinados problemas en matemáticas puras y aplicadas.

Hay muchas obras dedicadas a Euler; el volumen colectivo sobre Euler *1983* es la fuente más completa de que se dispone hoy, y algunos volúmenes de la edición (*Opera omnia*) de sus obras contienen artículos valiosos escritos por los editores.

3. Lagrange y la función derivada

A fines del siglo XVIII Lagrange desafió a la tradición euleriana al ofrecer su propio enfoque para el cálculo, la cual habría de usarse en lugar de las diferenciales de Leibniz/Euler y también en vez de las teorías de los límites. Para él, la forma rigurosa era algebrizar todo y calcular por medio de reglas formales. En concreto, sostuvo como un hecho demostrado que "toda" función tenía una expansión en serie de Taylor

$$f(x + i) = a_0(x) + a_1(x)i + a_2(x)i^2/2! + \ldots \qquad (3.1)$$

(y con ello siguió a Newton al asignar un estado principal a las series de potencias); la idea era *definir* las "funciones derivadas" de f como los coeficientes $a_1(x)$, $a_2(x)$, ... y obtenerlas mediante manipulaciones totalmente algebraicas de las expresiones. Introdujo las notaciones '$f'(x)$', '$f''(x)$', ... para sus funciones derivadas. La integral, una vez más, aparecía como la inversa automática; $f(x)$ era la integral de $a_1(x)$, $a_1(x)$ la de $a_2(x)$, ... y así sucesivamente. Desarrolló su enfoque en la década de 1760 y le dio una formulación definitiva en su *Théorie des fonctions analytiques (1797)*, texto basado en sus enseñanzas en la *Ecole Polytechnique* en París (véase párrafo 7.5).

Se trata de una buena idea pero le hace falta un poco de convicción. Por ejemplo, Lagrange afirmó que ningún término de la forma $ui^{m/n}$ podía ocurrir en la expansión de $f(x + i)$, pero no excluyó de manera categórica la posibilidad de valores múltiples también en cierta medida cometió descuido con la notación que recurría a virgulillas (*1797*, 7-14; véase también párrafo 7.4). Surgieron otras cuestiones. En primer lugar, ¿puede 'cualquier' función ser expresada mediante una serie de Taylor? Entre sus seguidores, Arbogast (*1800*) puso más empeño que todos los demás en producir algoritmos para generar series de potencias; pero tampoco su relación es exhaustiva, ni siquiera en relación con las funciones que se ma-

nejaban en su época. En segundo lugar, ¿pueden los cálculos requeridos realizarse sin recurrir a los límites o a las infinitesimales? Lagrange sólo mostró que podía hacerse en unos cuantos casos, aunque sus esfuerzos y los de sus partidarios (figuras menores como Brisson, Français y Servois) introdujeron las nuevas y fascinantes álgebras de las ecuaciones funcionales y de los operadores diferenciales (véase mi trabajo de *1979*). Nos hallamos ante un capítulo muy importante pero descuidado de la historia del álgebra, pues cimentó para siempre la noción del álgebra como el simbolismo del número y la cantidad solamente.

Pero ¿dónde queda entonces el cálculo? En Francia, entonces la capital mundial de las matemáticas, se advierte una situación confusa, con tres tradiciones (la de los límites, la de las diferenciales y la de las series de Taylor) que reciben apoyo. Lacroix, el principal escritor de libros de texto de la época, presentó las tres en su voluminoso tratado sobre el cálculo, publicado hacia 1800 y con una segunda edición en la década de 1810 (Lacroix *Calculus*). Lazare Carnot vacilaba sobre cómo considerar a los límites y al tipo de infinitesimales defendidos en las varias ediciones de sus reflexiones sobre el cálculo (Carnot *Calculus*; consúltese a Yushkevich *1971*). En 1812 el consejo directivo de la *Ecole Polytechnique*, el *Conseil de Perfectionnement*, bajo el estímulo de Laplace decidió detener la tendencia de enseñar límites (tendencia posiblemente alentada por las enseñanzas de Ampère; véase su artículo de *1806*) y reintrodujo las infinitesimales; pero en el curso que entonces impartía Poinsot en *1815* éste se las ingenió para utilizar las tres tradiciones al mismo tiempo. Consideraba a la "función diferencial" $dy \div dx$ como la "razón última" $\Delta y \div \Delta x$ del cociente de diferencia conforme esas diferencias disminuían hasta alcanzar las "cantidades diferenciales que se acercaban" a los valores ortodoxos; pero también se servía de las ecuaciones funcionales para calcular las funciones diferenciales de ciertas funciones simples por medios puramente algebraicos.

Sin embargo, la situación iba a cambiar pronto en París. Tras la Restauración Borbónica, Augustin-Louis Cauchy fue nombrado miembro del cuerpo docente de la escuela en 1816, y por más de una década compartiría la cátedra de análisis con Ampère. Durante ese periodo introdujo al análisis matemático como una nueva materia de trabajo.

4. Cauchy y la primacía de los límites

Los dos libros más importantes de Cauchy son su *Cours d' analyse (1821)* y el *Résumé* de sus lecciones de cálculo *(1823)*. El *Cours* no contiene na-

da de cálculo, pero es su obra fundamental, ya que en ella refinó la teoría de los límites con mayor rigor y la utilizó como el fundamento del análisis matemático, la nueva materia que incluía la teoría de las funciones continuas, la convergencia de las series infinitas y otras teorías relacionadas con esto. Presentó el cálculo en el *Résumé*, con 20 lecciones dedicadas al cálculo diferencial, seguidas por otras 20 lecciones sobre el cálculo integral. En lugar del *encyclopédisme* de Lacroix o el eclecticismo de Poinsot, tenemos aquí una ordenación rigurosa del material en un formato integrado por definiciones y teoremas básicos, expuestos en un orden "lógico" y con las mismas notaciones utilizadas en todo el texto.

El análisis de variable real debido a Cauchy se describe en mi libro de *1970* y en el de Grabiner de *1981*, trabajos en que se hacen amplias referencias a otros escritos. Un componente muy importante es el medio por el cual llevó sus ideas de la variable real a la compleja, y pasó incluso a las soluciones complejas en términos de la integral de Fourier de ecuaciones diferenciales lineales parciales. Pero sería una gran digresión describir aquí esos detalles.

En el *Résumé* aparece el estilo de Cauchy de una manera notable. A mí me parece que en sus matemáticas se refleja totalmente su personalidad, a saber, la búsqueda del orden y de lo sistemático no sólo en las matemáticas, sino en la vida política y religiosa de la Francia católica de los Borbones en que le tocó vivir. Ahora bien, la impresión original del *Résumé* revela la siguiente característica. Cada una de las 40 lecciones está impresa en cuatro páginas, o un pliego, quizá para distribuirlas a los alumnos en cada lección. Pero además, cada lección termina *exactamente en la última línea de la última página*. Lo mismo sucede con dos adiciones posteriores, de 12 y 4 páginas exactamente. Y esto ocurre en un libro cuya fundamentación matemática es la teoría de límites ...

La forma en que se desarrolla el cálculo de Cauchy puede sintetizarse de la manera siguiente. En el *Cours* presentó su noción (poco clara) de un "infinitesimal" como una variable que "disminuye indefinidamente en forma tal que desciende por debajo de cualquier número dado" y, por tanto, "tiene a cero como límite" (*1821*, 19; habría sido una gran ayuda si hubiera explicado claramente a qué se refería con "un número cualquiera"). Sobre esta base definió las siguientes ideas fundamentales para el cálculo diferencial (*1823*, Lección 4):

$$\text{Derivada: } f'(x) := \lim_{i \to 0} ((f(x + i) - f(x))/i), \qquad (4.1)$$

Diferencial: $df(x)$: $= \lim_{a \to 0} ((f(x + ah) - f(x))/a)$, h finito (4.2)

en caso de que realmente existiesen dichos límites. Gran parte del *Résumé* era una articulación de estas dos nociones, definidas para cualquier orden finito y para funciones de varias variables, lo mismo que para una variable. La exposición también incluía esta afirmación de la relación entre las dos (Lección 4). Poniendo

$$i = ah \text{ producía } df(x) = hf'(x) \tag{4.3}$$

a partir de (4.1) y (4.2); y la función particular

$$f(x) := x \text{ daba } dx = h \text{ y por tanto, } df(x) = f(x)dx, \tag{4.4}$$

a partir de $(4.3)_2$. Por consiguiente, dy/dx era otra vez una razón de diferenciales, pero con éstas definidas en forma distinta por (4.2) y capaces de tomar valores finitos, como en $(4.4)_2$ (véase a Taylor *1974*). "Es por esta razón que algunas veces se da a la función derivada el nombre [euleriano] de *coeficiente diferencial*', explicó Cauchy, con palabras que tal vez no habrían ayudado mucho a los estudiantes. '*Diferenciar* una función equivale a encontrar su diferencial'.

Una de las principales innovaciones hechas por Cauchy al cálculo fue que definió la integral independientemente de cualquier noción del cálculo diferencial. Para una función continua $f(x)$ sobre $[x_0, X]$ formó la suma

$$S := \Sigma^n_{r=1} f(x_{r-1})(x_r - x_{r-1}), \text{ donde } x_n = X, \tag{4.5}$$

e introdujo particiones más finas de $\{x_r\}$ para mostrar, con ayuda de varios lemas del *Cours* sobre los valores intermedios de una colección de valores como $\{x_r\}$, que se obtendría un valor límite, que sería independiente de la sucesión de particiones utilizadas para alcanzarlo y que el mismo valor se conseguiría si se usaran puntos arbitrarios $\{p_r\}$ *de* $\{[x_{r-1}, x_r]\}$ en vez de los límites inferiores $\{x_{r-1}\}$ como en (4.5) (Lección 21). Pero incluso este análisis matemático tan brillante contenía un elemento raro; en efecto, al explicar la notación '$\int f(x)dx$' para el valor límite, señaló que "la letra $\int$ que sustituía a la letra Σ ya no indica la suma de productos semejantes a la expresión, sino el límite de una suma de este tipo". No obstante, recurrió a $(4.4)_2$ para escribir la integral como

'$\int hf(x)$' y también '$\int f(x)dx$'. (4.6)

No sé a qué se refiera $(4.6)_1$; por fortuna Cauchy utilizó $(4.6)_2$ en interpretaciones posteriores, aunque el significado de dx deba quedar por el momento poco claro.

Entre los resultados que Cauchy produjo, naturalmente el principio de inversión resultaba decisivo. Ahora al fin se contaba con un genuino *teorema* fundamental del cálculo, precedido de condiciones suficientes sobre la función. Luego de ofrecer una prueba bastante endeble del primer teorema del valor medio en la Lección 22, expuso el teorema fundamental en la Lección 26 bajo la siguiente forma:

Teorema 4.1 Si $f(x)$ toma un valor finito y es continua sobre $[x_0, x]$ y $[x,X]$, entonces, respectivamente

$$'d/dx \int_{x_0}^{x} f(x)dx = f(x), \text{ y } d/dx \int_{x}^{X} f(x)dx = -f(x)' \qquad (4.7)$$

Es interesante señalar que omitió la segunda mitad del teorema la cual involucraba a $\int d/dx$.

El estudio de este teorema, de sus condiciones y de sus relaciones con otros resultados clave del cálculo (y con el análisis matemático en general) se convertiría más tarde en el interés dominante del análisis durante el siglo XIX (véase a Voss *1899*; y párrafos 7.5 y 7.6, para un ejemplo de las series de Taylor). En efecto, muchos otros teoremas fueron examinados y afinados más adelante. Por ejemplo, cabe preguntarse *¿qué grado de rigor* ofrecía el análisis matemático de Cauchy?

5. Los refinamientos de los weierstrassianos

La siguiente etapa de perfeccionamiento se debe en gran parte a Weierstrass y a los que asistieron a sus lecciones en la Universidad de Berlín, entre las décadas de 1860 y 1880. Rehacer la historia es una tarea complicada por varias razones (especialmente por el hecho de que Weierstrass publicó muy poco). En esencia, el análisis en la forma en que lo han transmitido Cauchy y sus contemporáneos constituía la motivación central, pero también se encuentran problemas elegantes en un ensayo póstumo de Riemann, publicado en *1868* y dedicado a las series trigonométricas.

Resumiré los refinamientos bajo seis grandes encabezados. No pude prescindir de los cambios en el análisis *como un todo*; sin duda el cálculo fue una de las partes importantes afectadas. Para mayores detalles consúltese a Pringsheim *1899*, mi texto de *1970*, cap. 6 y el de Dugac *1973* (en los que se transcriben varios manuscritos de Weierstrass relacionados con este punto).

5.1 *Técnicas multivariadas.* El análisis de Cauchy es adecuado cuando se toma un límite a la vez: por ejemplo, *lím f(x)* cuando $x \to a$, o bien, *lím* S_n cuando $x \to \infty$. Pero con más de una variable que se mueva al mismo tiempo —como en el cociente de la diferencia (4.1) o en series trigonométricas—, surgen importantes problemas adicionales de rigor. Los weierstrassianos paulatinamente fueron efectuando los refinamientos necesarios encuanto a convergencia uniforme, no uniforme y cuasiuniforme (véase a Hardy *1981*).[1]

5.2 *Simbolismo.* Estos refinamientos de las técnicas requerían una utilización mucho más rigurosa del simbolismo, a fin de que la relación funcional entre variables (incluidas las variables incrementales) pudiera indicarse con claridad y así evitar las deficiencias de rigor. (A esta forma de simbolismo se le conoce a veces con el nombre de "epsilóntica" (o "epsilonitis") por su uso de las letras griegas ε, δ y otros símbolos.) Peano desempeñó un papel de primera importancia aquí, pues aportó un simbolismo uniforme que le ayudó a crear una forma de lógica matemática (consúltese mi artículo de *1986a*).

5.3 *Estructura de la línea real.* De cuando en cuando Cauchy y sus contemporáneos mencionan las propiedades de la línea real al demostrar ciertos teoremas. Sin embargo, fue apenas en 1870 que se ofrecieron definiciones de los números irracionales de parte de Cantor, Dedekind, Heine, Méray y el propio Weierstrass (Pringsheim *1898*).

5.4 *Topología de conjuntos de puntos.* La palabra "sistema", cuando con ella se designan colecciones de objetos matemáticos, es común en esta disciplina desde fines del siglo XVIII; pero en esa época todavía no se formulaba la teoría de los conjuntos o bien era aún muy primitiva. Sin embargo, al efectuarse los refinamientos que acabamos de describir y al surgir algunos problemas del trabajo de Riemann sobre las series trigonométricas, la topología de los conjuntos tuvo que ser desarrollada. Cantor fue la figura central en esta área, ya que propuso una teoría que finalmente se convirtió en su teoría *general* de los conjuntos (Dauben *1979*).

5.5 *Integración.* El trabajo de Riemann de *1868* incluía un estudio sobre la integral de Cauchy y en él se daba una versión de las "sumas de

Cauchy-Riemann", incluyéndose además una topología implícita de los conjuntos y una teoría de la medición. Estas ideas fueron retomadas por los weierstrassianos para desarrollar por primera vez una teoría de contacto en el sentido de Cantor, Jordan y Peano y, más tarde, Borel, Lebesgue, Vitali y Young (Hawkins *1970*) desarrollaron una "teoría completa de la medición".

5.6 La *teoría de los límites* fue perfeccionada en algunos aspectos durante este periodo. Particular importancia tuvo la distinción entre el límite superior y el mínimo límite superior, así como las distinciones correspondientes. Ello impulsó a Dini, por ejemplo, a refinar la definición de Cauchy (4.1) de la derivada tomando en cuenta derivadas por la izquierda o por la derecha, tanto superiores como inferiores (*1878*, art. 15). Se perfeccionaron algunos detalles de las pruebas, usando sistemáticamente valores positivos de las cantidades (por ejemplo) y distinguiendo "<" claramente de "≤".

6. La "bomba" de Zermelo en la década de 1900

A medida que se introducían y se mejoraban todos estos refinamientos (algunas veces, conviene señalarlo, en una forma demasiado exhaustiva y tediosa), el análisis matemático parecía haber alcanzado el clímax de perfección y rigor. Y, sin embargo, quedaba una etapa por recorrer a lo largo de la década de 1900, cuando Zermelo anunció en *1904* que se necesitaba un "axioma de elección" para demostrar el teorema de Cantor, según el cual todo conjunto puede ordenarse de manera que quede "bien ordenado". Surgió una fuerte polémica (Moore *1982*) respecto al carácter no constructivo del axioma (porque permite formar un conjunto mediante selecciones infinitas efectuadas *sin* una regla de selección), sus distintas formas (selección numerable frente a selección no numerable y la selección simultánea frente a la sucesiva), las modificaciones hechas a las pruebas para poder efectuar estas selecciones (de hecho, a unas cuantas pruebas se les depuró de esto) y otros puntos.

Gran parte de la discusión se centró en el análisis matemático y en la teoría de los conjuntos en general y no específicamente en el cálculo. Así que no la explicaré en forma pormenorizada. Pero parte de ella se refería concretamente a la teoría de la medición, ámbito en que había nacido. Un caso interesante es Lebesgue. Pese a su participación activa en la polémica en la década de 1900, cuando acuñó la frase "la bomba de Zermelo" que reproduje en el título de esta sección, al parecer nunca estuvo satisfecho con los axiomas ni tuvo claridad respecto del papel que desempeña-

ron en su formulación de la aditividad denumerable de la función de medición (Moore *1983*). Esta nota de incertidumbre es apropiada para dar por terminada esta reseña de la azarosa historia del cálculo.

7. Algunas cuestiones de carácter educativo

Impulsado por el deseo de ofrecer un panorama general de la historia del cálculo desde Newton hasta Lebesgue, no he tenido espacio más que para presentar los principios y características básicas de cada versión. Un estudio de la práctica de cada una de ellas revelaría con mayor claridad sus diferencias (lo mismo que algunos puntos en común). Y vale la pena conocer todas ellas. En esta última sección ofreceré algunas de las muchas lecciones pedagógicas que la historia del cálculo puede enseñar a quienes lo imparten en el aula. Los ejemplos que escogí son adecuados para la enseñanza del cálculo a estudiantes de matemáticas en el nivel universitario ya que ahí es donde tengo experiencia; pero también otros tipos de enseñanza del cálculo podrán beneficiarse de los datos históricos aquí reunidos. Los tres primeros casos son de carácter general; los tres últimos son resultados particulares.

7.1 *Tradiciones diferentes.* La historia que hemos sintetizado en páginas anteriores es *confusa*: se adoptan diversos planteamientos y luego distintos términos y notaciones. Y peor aún: se emplean los *mismos* términos y notaciones para designar conceptos diferentes (por ejemplo, el uso de Cauchy de $f'(x)$ y de 'función derivada' (sección 4) tomadas de Lagrange y por lo tanto asociadas a concepciones muy diferentes (sección 3). Vestigios de tendencias tan opuestas aparecen en los libros modernos de texto; sólo que en vez de explicarle al lector que *existen* esas tendencias, los autores se limitan a presentar las que conocen y omiten las demás. Por tanto, el estudiante se sentirá desconcertado si lee varios libros que sigan distintos enfoques.

Pongamos, por ejemplo, el caso de la notación dy/dx. ¿Es un símbolo completo o bien es la razón de diferenciales definidas en la misma forma que en Cauchy en (4.2), o bien es el operador d/dx tal como se usa en la nueva álgebra mencionada en la sección 3? Todas estas intepretaciones tienen una historia muy respetable; de ahí que *todas* deberían recibir suficiente atención y no sólo la *preferida* por el profesor. De manera análoga, habría que explicar los orígenes de $\int y dx$ (véase sección 7.3).

7.2 *Niveles de rigor.* Los matemáticos suelen pensar que su ciencia es rigurosa (cuando se ejecuta en la forma en que lo desean) o no (cuando no se realiza así). Pero la historia de las matemáticas nos enseña sin lugar a dudas que *el rigor se da en niveles.* Y estos, por tanto, han de ser especificados antes de evaluar el trabajo matemático del estudiante. En las secciones 4 y 6 se muestra una secuencia muy clara de ejemplos; los axiomas de elección constituyen un mejoramiento del nivel del rigor weierstrassiano, del mismo modo que los seguidores de Weierstrass perfeccionaron el rigor del periodo de Cauchy.

Pocos libros de texto modernos de matemáticas muestran entendimiento de este punto tan trascendente. Casi siempre el primer capítulo presenta una mezcla incoherente de la teoría de los límites en el nivel de Cauchy y de Weierstrass, tomando la precaución de incluir algunos elementos de la topología de los conjuntos. Sin embargo, muchas veces la teoría de la medida no aparece más adelante: sólo la integral de Cauchy-Riemann, la cual requiere poca topología de conjuntos. A los refinamientos que tienen lugar en los casos de varias variables no se les concede la atención que merecen. *A propósito* de la sección 5.1 en particular, con el fin de probar unos cuantos resultados, los modos de convergencia de las series infinitas de funciones se manejan *sólo* mediante la introducción, aquí y allá, de la convergencia uniforme sobre un intervalo.

Para los estudiantes que quieren *entender* el análisis matemático y, en particular, el cálculo, les recomiendo los viejos libros escritos por autores que se interesaban además por la historia del cálculo y aprendieron mucho de ella. En inglés, vale la pena consultar sobre todo a Carslaw *1930*, a Knopp *1951* y a Whittaker y Watson *1927*. Por fortuna, el primero y el último de estos libros están o han estado disponibles en rústica, quizá un reflejo de la resistencia del usuario ante el producto moderno.[2]

7.3 *El lugar de las diferenciales.* El planteamiento de Cauchy-Weierstrass, basado en los límites, se ha convertido naturalmente en la forma habitual de enseñanza en los cursos dedicados al cálculo o al análisis (puro). Sin embargo, en los cursos de mecánica, astronomía, física matemática e ingeniería a menudo se emplea la forma euleriana del cálculo diferencial (sección 2) por su flexibilidad intuitiva en la construcción de los modelos diferenciales de los fenómenos físicos en cuestión. Sobre este punto Cauchy fue criticado en la *Ecole Polytechnique* durante la década de 1820 por de Prony, uno de los sinodales de graduación (véase mi *1981*, 686):

> La enseñanza, en el análisis puro y en la geometría analítica, parece haber dejado qué desear en la práctica y en la facilidad de las aplicaciones a las fórmulas y a las teorías generales: algunos alumnos muy brillantes, luego de demostrar satisfactoriamente las fórmulas, se encuentran en problemas cuando llega el momento de resolver casos concretos. Es indispensable no aislar nunca las nociones abstractas de las consideraciones de detalle; estas últimas siempre preceden a aquéllas en el desarrollo natural de las ideas. Y es necesario aceptar esta ley de la naturaleza, sobre todo cuando se trata de enseñar a jóvenes para quienes la teoría ha de ser una *herramienta* de la práctica.

Entre más cambios. En el caso de la enseñanza del cálculo, la hegemonía de los límites ha provocado una *esquizofrenia educacional* desafortunada y totalmente innecesaria: el cálculo puro no es otra cosa que epsilonitis de pared a pared e ignora la forma diferencial euleriana del cálculo que los cursos de cálculo aplicado con excelente razón, a menudo utilizan como elemento básico.

La situación ha cambiado un poco con la introducción de cursos de cálculo en que se usan infinitesimales basados en el análisis no estándar, generalmente en formas muy diluidas (véase, por ejemplo, a Keisler *1976*). Pero puede emplearse la forma tradicional, que se describe en la sección 2, con mucho éxito mientras se admita sin reservas la legitimidad de la diferencial (consúltese la sección 7.4).

Me gustaría agregar que las afirmaciones hechas por los analistas no estándar son absurdas, en el sentido de que la historia del cálculo debe reescribirse *por* la existencia de este tema (y, por lo mismo, utilizándolo como regla dorada). "Creo que Lazare Carnot nada tiene que ver con el análisis no estándar y que éste tampoco tiene nada que ver con Carnot", me dijo hace poco el profesor Yushkevich después que escuchamos una conferencia de este tipo. Y por supuesto tenía razón (véase también a Bos *1974*, 81-84 y a Edwards *1979*, 341-346). Precisamente *porque* el análisis no estándar es un logro tan extraordinario de las matemáticas, no es posible trasladarlo al pasado sin provocar una deformación histórica sobre este punto.

7.4 *Formación de una ecuación diferencial "real"*. Este es un ejemplo típico de cómo el cálculo euleriano permite la formación de una ecuación que relacione las diferenciales: la deducción de la ecuación de la difusión del calor propuesta por Fourier. Desde el punto de vista histórico es muy importante, por haber sido la primera gran ecuación de la física matemática que no se encuentra dentro de la mecánica newtoniana.

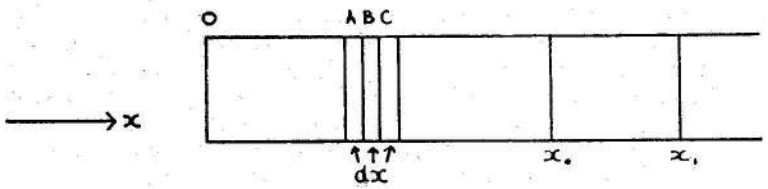


Figura 1

La figura 1 muestra una barra delgada homogénea, que difunde el calor a lo largo de ella con una conductividad K y en el ambiente (que se supone que está a una temperatura 0) con una conductividad h. Sea y la temperatura en el punto B una distancia x a lo largo de la barra, y supongamos que la barra está partida en fragmentos diferenciales iguales de espesor dx (por tanto, x es una variable independiente).

Fourier definió K en relación con el gradiente de temperatura, en el sentido que la pérdida de calor de x_0 a x_1 estaba dada por la ley del enfriamiento de Newton como

$$-(K/x_1-x_0)(y_1-y_0),\ -K(y_1-y_0/x_1-x_0) \quad \text{que se convierte en } K(dy/dx) \quad (7.2)$$

para una rebanada como B. Así pues, la ganancia neta del calor interno de B estaba dada por la diferencia entre el flujo de salida hacia C (a la temperatura y') y el flujo de entrada desde A en el intervalo de tiempo dt:

$$-K((dy'/dx)-(dy/dx)dt, \text{ o } Kd(dy/dx)dt \quad (7.3)$$

Durante el mismo tiempo fluía calor hacia el medio ambiente en la cantidad

$$-h(y-0)dx\ dt,, \text{ o bien } -hy\ dx\ dt \quad (7.4)$$

Este intercambio de calor ocasionaba un aumento de temperatura dy en B a lo largo del intervalo de tiempo dt, que en calorimetría se expresaba como la cantidad de calor

$$CD\ dx\ dy \quad (7.5)$$

donde C era el calor específico de la barra y D su densidad. Por tanto, la ecuación de balance de calor para B,

(flujo interno de calor) - (flujo externo de calor) = (ganancia neta de calor), (7.6)

se convertía, a partir de (7.2) - (7.4), en

$$Kd\,(dy/dx)\,dt - hy\,dx\,dt = CD\,dx\,dy, \tag{7.7}$$

o, teniendo en cuenta que dx y dt eran diferenciales constantes, en

$$ddy/(dx)^2 - \mathrm{hy} = \mathrm{CD}\,dy/dt, \tag{7.8}$$

(Fourier *1807*, arts. 19,23, con algunas modificaciones insignificantes).

Vale la pena hacer algunos comentarios. Primero, en la sección 2 mencioné que el cálculo leibniziano preservaba las dimensiones; cuando se aplica a problemas de física, hay que tener mayor cuidado y definir correctamente las constantes físicas para que las expresiones sean homogéneas [todas de segundo orden en (7.6), por ejemplo]. De hecho, en los primeros intentos de Fourier, y también en los de Biot, que en esto se anticipó a él, se cometieron errores. Segundo, expresiones como "dy/dx" eran razones evaluadas en determinado lado de B, no como el valor límite del cociente de diferencia al acercarse al lado. Conviene señalar la diferencia entre (7.7) y la ecuación moderna de difusión

$$K\,(\partial^2 y/\partial x^2) - hy = CD\,\partial y/\partial t \tag{7.9}$$

y su deducción mediante los métodos de toma de límites. Si no se observa esta diferencia, el método puede interpretarse en una forma irremediablemente incorrecta (véase mi artículo de *1975*, parte 2). Tercero, como ambos dx y dt adoptan diferenciales constantes, es importante recordar que los incrementos dy y ddy en el argumento son diferenciales *parciales*, que de hecho no queda indicado por estas notaciones. Varias modificaciones de la notación se usaron en el cálculo diferencial de varias variables para indicar las diferenciales parciales; por ejemplo, Cauchy habría escrito aquí 'd_1y' y 'd_1y' para indicar las variables relevantes (consúltese su *1823*, Lección 8).

7.5 *Series de Taylor con remanente.* Un aspecto interesante del cálculo es la prueba de la serie de Taylor, de preferencia con un término restante. La historia de este tema (consúltese Pringsheim *1900*) es muy ilustrativo desde el punto de vista pedagógico. Lagrange sostuvo que, dado un incremento i en x, entonces "para cualquier función fx",

$$f(x+i) = f(x) + iP, \text{ donde } P = \infty \text{ cuando } i = 0 \qquad (7.10)$$

De manera análoga, para la nueva función P,

$$P = p + iQ, \qquad (7.11)$$

y así sucesivamente, de modo que la serie se generaba por sustitución:

$$f(x + i) = f(x) + pi + qi^2 \qquad (7.12)$$

Para encontrar la relación entre f y las funciones p, q..., escribió

$$f(x + i + o) = f(x + (i + o)) = f((x + i) + o) \qquad (7.13)$$

y desarrolló cada término mediante (7.12), e introduciendo funciones primas como 'f ' y 'p ' sin explicación. Los valores infinitos de f fueron admitidos mediante las potencias inversas de i en (7.12). No surgió un término remanente *claro* (*1797*, 7-14, 38, 39).

Los colegas de Lagrange intentaron mejorar este razonamiento. Poisson (*1805*) supuso la expansión más general

$$f(x + i) = f(x) + i^{a}p(x) + i^{b}q(x) + \ldots, a < b < c \ldots, \qquad (7.14)$$

e imitó el argumento anterior para probar que los índices tomaron los valores sucesivos 1, 2, 3, ... y que las primas podían adoptarse para denotar las "funciones primitivas" con las cuales se relacionaban las funciones. Ampère (*1806*, 162-167) consideró la definición del cociente de diferencia como la identidad

$$f(z) = f(x) + p(x,z)\,(z-x) \qquad (7.15)$$

y realizó las sustituciones y diferenciaciones sucesivas para producir la serie con una forma de remanente diferencial; en un trabajo posterior (*1827*) derivó

$$P(a): = (f(x + h) - f(x + ah))/(1 - a), \tag{7.16}$$

sucesivamente respecto de a y obtuvo un resultado similar.

La prueba mediante integración por partes en $\int_0^h f(x + z)dz$, bosquejada en d'Alembert (*1754*, 50), fue perfeccionada por Fourier y de Prony hacia 1800 y apareció en el *Résumé* de Cauchy, con el respectivo reconocimiento a de Prony (*1823*, Lección 36). Desde luego, Cauchy fue más cauteloso que su predecesor en lo tocante a las condiciones requeridas para f, y se sirvió del segundo teorema del valor medio para convertir el término remanente de su forma integral a la forma diferencial. En el segundo agregado al libro encontró la forma diferencial directamente al aplicar el primer teorema del valor medio sucesivamente a la primera, segunda, ... y enésima sumas parciales de la serie.

Estos datos del pasado constituyen un excelente material didáctico para esta área del cálculo, pues se exponen correctamente las cuestiones referentes al rigor y a la generalidad. También se mencionan las relaciones entre las series y los teoremas del valor medio, especialmente si se aplican condiciones de uniformidad al cociente de diferencias cuando se trata como una función tanto de sus variables base como de sus variables incrementadas.

7.6 *¿Conserva su validez la serie de Taylor?* Al final de la Lección 38 del *Résumé*, Cauchy señaló que $e^{-1/x2}$ no tiene una expansión de Taylor y con ello acabó con los fundamentos del cálculo sentados por Lagrange. El resultado no fue importante para él, ya que nunca se había adherido al planteamiento de Lagrange; pero el hecho tuvo consecuencias más serias en las partes del análisis que se basaban en las pruebas donde se utilizaban series de potencias. Esto se evidencia en el trabajo de *1822* en que anunció éste y otros ejemplos contrarios, explorando al mismo tiempo algunas consecuencias.

Poisson era un ferviente partidario del planteamiento de Lagrange, de modo que tuvo que responder a Cauchy. En una nota de *1822* tomó la función

$$x^{-m} e^{-1/x2}, \text{ donde } m > 0, \tag{7.17}$$

y sostuvo que si $m \to \infty$ además

$$m > (\ln x)/x^2 \tag{7.18}$$

entonces $x^m \to \infty$ más rápidamente que $e^{1/x^2} \to 0$ cuando $x \to 0$, de manera que "siempre hay una parte [de la serie de Taylor] que desaparece con x y otra parte cuyos valores son infinitos para $x = 0$ ", con lo cual se salva la fe [en el procedimiento]. El argumento es débil aun si se juzga con los criterios tan deficientes de Poisson; pero el estudiante tendrá que trabajar un poco para descubrir por qué es erróneo.

Los estudiantes también obtendrán consuelo a partir de estos datos históricos. Euler había descubierto que todos los coeficientes diferenciales de la función $e^{1/x}$ (que era otro contraejemplo de Cauchy) eran cero cuando $x = 0$; pero no advirtió las consecuencias que esto tenía para las series de Taylor, ya que su interés se centraba en la cuadratura numérica de las integrales (*1768* art. 327). Lacroix tampoco reparó en ellas cuando describió el procedimiento de Euler en su tratado de cálculo [*Calculus*, 2a. ed., vol. 2 (1814), 143, 144]. Es muy probable que Cauchy haya encontrado sus contraejemplos sin conocer estas deficiencias de sus predecesores.

8. Perspectivas

Una razón por la cual la historia de las matemáticas puede ser útil para la enseñanza es que "la educación imita la historia", palabras con que algunas veces me he referido a este hecho. Por supuesto, no es necesario ni conveniente exponer todos los pormenores históricos; pero la "sátira histórica" tiene muchas posibilidades al realizar cierta clase de imitación de la historia a lo largo de la enseñanza (véase mi artículo de *1973*).

Sin embargo, los que defienden esos puntos de vista lo hacen hoy en un ambiente de indiferencia y hasta hostilidad hacia la historia, situación que (aunque parezca una ironía) tiene también su historia. No puede esperarse que en la ciencia actual influyan argumentos que en principio ha rechazado. Por ejemplo, la última vez que hablé en Gran Bretaña sobre la cuestión general de utilizar la historia en la enseñanza de las matemáticas (tanto en la formación de los estudiantes como en la de los profesores) fue en mayo de 1973, cuando me dirigí a una audiencia de matemáticos profesionales y de profesores de esta materia pertenecientes a la Manchester Branch of the Mathematical Association. En la sesión de preguntas, uno de los profesionales refutó mis opiniones con un argumento que no se me había ocurrido: "No tiene caso enseñar las matemáticas en la forma en que usted propone, porque en el tiempo del que se dispone se explicarían menos teoremas".

Algunos de los profesores no parecían totalmente convencidos, aunque no se atrevían a expresar en público sus ideas. Menos de cuatro años más tarde, ofrecí una conferencia a un numeroso grupo de profesores de matemáticas (y a no profesionales) en Sydney (Australia) en noviembre de 1977, y en ella traté del cálculo desde Leibniz hasta Cauchy. En cierto momento empecé a explicar las diversas interpretaciones de "*dy/dx*" (párrafo 7.1); pero con gran sorpresa descubrí que a muchos de los asistentes *nunca les habían mostrado* la notación "*dy/dx*" cuando aprendieron el cálculo.

Así pues, existe un conflicto entre profesores y profesionales. Algunos de los que asistieron a mi conferencia en Sydney me manifestaron abiertamente su enojo por las deficiencias en la formación matemática que habían recibido en la universidad (tanto en el caso de "*dy/dx*" como en muchos otros aspectos). Mientras tanto, en Manchester otro profesional me consoló, luego de haber rechazado los puntos de vista expresados durante la conferencia. "Nos gustó mucho su conferencia", señaló, "pero desde luego que no podemos tomar en serio lo que ha dicho".

Notas

1. En mi texto de *1970*, 55 58, propuse la expresión "evasión del límite", una contracción de la frase más exacta pero también más compleja "evasión del valor límite", para caracterizar el análisis iniciado por Cauchy y perfeccionado por los weierstrassianos. La designación pone de relieve la definición básica, y los procedimientos se basan en la manipulación de las cantidades y su valor difiere de los valores límites en cuestión, con lo cual los evitan. Algunas versiones del análisis están contaminadas por "alcanzar de los límites", ya que se usan estos valores límite. Ejemplos interesantes de ello son Stokes *1849* y Seidel *1848*, autores que hablan de una "convergencia infinita y arbitrariamente lenta", en que la convergencia de series infinitas de funciones se valora por medios que incluyen llevar el valor sufijo n a su valor alcanzado, lo cual introduce cierta confusión en el sistema. Así pues, estas definiciones no son *cualquier* modo de convergencia uniforme o no uniforme según mi opinión, pero mi opinión no la comparte la mayor parte de los historiadores del análisis matemático. Un interesante detalle histórico se refiere al motivo que posiblemente impulsó a Cauchy a introducir la convergencia uniforme sobre un intervalo en su nota de *1853*. Algunas veces se cita a Seidel y Stokes como fuentes, pero el profesor I. Domar (Uppsala) hace poco me habló del artículo de Björling *1847*, donde se presenta una versión en parte contaminada por la convergencia uniforme y donde se hace una crítica explícita del teorema de las series infinitas expuestas en el *Cours* de Cauchy. Difícilmente Cauchy tuvo conocimiento de esta publicación de la Academia de Uppsala, pero con toda seguridad se enteró de la traducción francesa de un trabajo afín de Björling que apareció en el *Journal des mathématiques pures et appliquées* de Liouville el año antes de que se publicara su trabajo (Björling *1852*). Sobre esta parte de la historia, consúltese mi artículo de *1968b*.

2. Un estudio reciente de los libros de mayor difusión sobre cálculo y análisis matemático reveló una absurda confusión de explicaciones parciales sobre los diversos sentidos de *'dy/dx'*, *'f(x)*, *'∫dx'* y de otras expresiones. Por ejemplo, no es difícil encontrar la derivada presentada como "*dx/dy*" interpretada como un símbolo entero, pero también la diferencial *dx* definida más adelante. El premio al humor no intencional fue otorgado a uno de los textos de mayor uso, Protter y Morray *1964*, en que se definen las derivadas exclusivamente en términos de la notación *f' (x)* (p.77), y luego da la notación *'∫f(x)dx'* para la integral definida al "explicar" que "La *dx* es sólo una yuxtaposición de letras que se consideran inseparables" (pp. 90-91); luego define la diferencial y obtiene (4.3) ... (pp. 184-185).

Bibliografía

Muchas historias de las matemáticas contienen capítulos y secciones dedicadas a la historia del cálculo y del análisis matemático, y no es necesario citarlas aquí. Entre las que tratan a fondo el periodo que he descrito, Boyer *1949* sigue siendo una guía adecuada, si bien no estudia la diferencia entre análisis univariado y multivariado cuando describe en el capítulo 7 "La [*sic*] formulación rigurosa". Edwards *1979*, capítulos 8-12, expone el material con mayor detalle e incluye con mucha frecuencia ejercicios para el lector; pero sólo presenta definiciones de números irracionales (párrafo 5.3) considerándolas el mejoramiento de los weierstrassianos. Ambos libros contienen explicaciones muy útiles de las técnicas antiguas y medievales del cálculo.

La historia general más completa del periodo es mi libro de *1980*, capítulos 2-5; en el capítulo 1 se habla de las formulaciones anteriores a Newton y Leibniz, y en el capítulo 6 se describe la evolución de la teoría de los conjuntos y de la lógica matemática. En mi artículo *de 1977* se explica un programa de estudios que he realizado siguiendo mi libro; la presentación contenía clases de lectura, en que juntos leíamos íntegramente pasajes de la literatura básica y discutíamos el contenido.

Algunos libros de texto han intentado romper con el molde tan rígido de la enseñanza epsilóntica. Sin embargo, por ahora no pretendemos ofrecer aquí una reseña de las diferentes presentaciones. En efecto, podría elaborarse una tesis muy importante (y útil) sobre la historia de los libros de texto del siglo XX en los distintos niveles en que se enseña el cálculo y el análisis.

d' Alembert, J. le R. *1754 Recherches sur différens points importans de système du monde*, vol. 1. Paris (David).

Ampère, A. M. *1806 'Recherches sur quelques points de la théorie des fonctions dérivées ...', J. Ecole Polyt.*, (1) **6**, cah. 16, 148-181.

——*1827* 'Démostration du théorème de Taylor ...', *Ann. math, pures appl.*, **17**, 317-329.

Arbogast, L. F. A. *Du calcul des dérivations*, Strasbourg (Levrault).

Berkeley, G. *1734 The analyst* London (Towson). [Also in *Works* (ed. A. A. Luce and T.E. Jessop), **4**, 53-102.]

Birkhoff, G. *1973* (ed.) *A source book in classical analysis*, Cambridge, Mass. (Harvard University Press). [Incluye traducciones al inglés de algunos artículos importantes, pero con frecuencia presenta anacronismos en cuanto a términos y notaciones.]

Björling, E. F. *1847* 'Doctrinae serierum infinitorum exercitationes', *Nova acta Soc. Sci. Upsala*, 13, 61-86, 143-186.

—— *1852* 'Sur une classe remarquable des séries définies', *J. math. pures appl.*, (1) **17**, 454-472.

Boole, G. *1859 A treatiste on differential equations*, 1st. ed. London (Macmillan). [Last ed. 1877; paperback reprint New York (Dover).]

Bos, H. J. M. *1974* 'Differentials, higher-order differential and the derivative in the Leibnizian calculus', *Arch. hist. exact sci.*, **14**, 1-90.

Boyer, C. *1949 The history of the calculus and its conceptual development*, New York (Columbia University Press). [Paperback reprint New York (Dover).]

Cajori, F. *1919 A History of the conceptions of limits of fluxions from Newton to Woodhouse*, Chicago (Open Court).

Carnot, L. N. M. *Calculus Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal*, Ist ed. 1797, Paris (Duprat), 2nd ed. 1813, Paris (Courcier). [Several reprints; no satisfactory English translations.]

Carslaw, H. S. *1930 Introduction to the theory of Fourier's series and integrals*, 3rd ed. London (Macmillan). [Paperback reprint New York (Dover).]

Cauchy, A. L. *1821 Cours d'analyse...*, Paris (de Bure). [Also in *Oeuvres complètes*, (2) 3.]

1822 'Sur le développement des fonctions en séries...', *Bull. sci. Soc. Philom. Paris*, 49-54. [Also in *Oeuvres complètes, (2)* **2**, 276-282.]

1823 Résumé des leçons... sur le calcul infinitésimal, Paris (de Bure). [Also in *Oeuvres complètes*, (2), **4**, 5-261.]

1853 'Note sur les séries convergentes...', *C.r. Acad. Roy. sci.*, **36**, 454-459. [Also in *Oeuvres complètes*, (1), **12**, 30-36.]

Child, J. M. *1920* (ed. and trans.) *The early mathematical manuscripts of Leibniz*, London (Open Court).

Dauben, J. W. *1979 Georg Cantor...*, Cambridge, Mass. (Harvard University Press).

Dini, U. *1878 Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali*, Piza (Nistri). [German trans: 1892, Leipzig (Teubner).]

Dugac. P. *1973)* 'Eléments d'analyse de Karl Weierstrass', *Arch. hist. exact sci.*, **10**, 41-176.

Edwards, C. H., Jr. *1979 The historical development of the calculus*, New York (Springer).

Euler, I. *1755 Institutiones calculi differentialis*, St. Petersburg (Academy Press). [También en *Opera omnia*, (1), **10**.]

1768 Institutiones calculi integralis, vol. I, St. Petersburg (Academy Press). [También en *Opera omnia*, (1), **11**.]

[ ] *1983 Leonhard Euler 1707 1783. Beiträge zu Leben und Werk*, Basel (Birkhäuser). [Una amplia gama de artículos en inglés, francés y alemán.]

Fourier, J. B. J. *1807* 'Théorie de la propagation de la chaleur dans les solides', manuscript, *passim* in I. Grattan-Guinness, in collaboration with J. R. Ravetz, *Joseph Fourier 1768, 1830...*, 1972, Cambridge, Mass. (M.I.T. Press).

Grabiner, J. *1981 The origins of Cauchy's rigorous calculus*, Cambridge, Mass. (M.I.T. Press).

Grattan-Guinness, I. *1970 The development of the foundations of mathematical analysis from Euler to Riemann*, Cambridge, Mass. (M.I.T. Press).

1973 'Not from nowhere. History and philosphy behind mathematical education', *Int. j. math. educ. sci. tech.*, **4**, 321-353.

——*1975* 'On Joseph Fourier: the man, the mathematician and the physicist', *Ann. sci.*, **32**, 503-514.

——*1977* 'A history of mathematics course for teachers', *Hist. math.*, **4**, 341-343.

——*1979* 'Babbage's mathematics in its time', *Brit. j. hist. sci.*, **12**, 82-88.

——*1980* (ed.) *From the calculus to set theory 1630-1910. An introductory history*, London (Durckworth). [Reimpresión en rústica 1981. Capítulos, en orden, de K. M. Pedersen, H. J. M. Bos, el editor, T. W. Hawkins, J. W. Dauben and R. Bunn.]

——*1981* 'Recent researches in French mathematical physics of the early 19th century', *Ann. sci.* **38**, 663-690.

——*1986a* 'From Weierstrass to Russell: a Peano medley', *Riv. stor. sci.*

——*1986b* 'The Cauchy-Seidel-Stokes story on uniform convergence again: was there a fourth man?', *Bull. Soc. Math. Belgique*.

Hardy, G. H. *1918* 'Sir George Stokes and the concept of uniform convergence', *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **19**, 148-156. [También en *Collected papers*, **7**, 505-513.]

Hawkins, T. W. *1970 Lebesgue's theory of integration...*, Madison, Wisconsin (University of Wisconsin Press). [Reimpreso en 1975, New York (Chelsea).]

Hofmann, J. E. *1949 Die Entwicklungsgeschichte der Leibnizschen Mathematik...*, Munich (Oldenbourg). [Traducción al inglés: *Leibniz in Paris 1672-1676...*, 1974, Cambridge (University Press).]

Keisler, H. J. *1976 Elementary calculus* and *Foundations of infinitesimal calculus*, 2 vols., Boston (Prindle, Weber and Schmidt).

Knopp, K. *1951 Theory and applications of infinite series* (traducción de R. C. H. Young), London and Glasgow (Blackie).

Lacroix, S. F. *Calculus Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*, 3 vols., 1st ed. 1797-1800, Paris (Duprat); 2nd ed. 1810-1819, Paris (Courcier).

Lagrangé, J. L. *1797 Théorie des fonctions analytiques...*, 1st ed., Paris (Imprimerie de la République). También en *J. Ecole Polyt.*, (1) **3** (1801), 1-277. [2nd ed. 1813, Paris (Bachelier); también en *Oeuvres*, **9**.]

Moore, G. H. *1982 Zermelo's axiom of choice...*, New York (Springer).

——*1983* Lebesgue's measure problem and Zermelo's axiom of choice...', *Trans. New York Acad. Sci.*, **412**, 129-154.

Newton, I. *Papers The mathematical papers of Isaac Newton*, 8 vols. (ed. D. T. Whiteside, 1967-1981, Cambridge University Press).

Poinsot, L. *1815* 'Des principles fondamentaux, et des règles générales du calcul différentiel', *Corr. Ecole Polyt.*, **3**, 111-131 [incluye un artículo que forma parte de una serie de artículos].

Poisson, S.-D. *1805* Démonstration du théorème deTaylor', *Corr. Ecole Polyt.*, **1**, 52-55.

——*1822* 'Remarque sur les intégrales des equations aux diférences partielles', *Bull. sci. Soc. Philom.* Paris, 81-85.

Pringsheim, A. *1898* 'Irrationalzehlen und Konvergenz unendlicher Prozesse', *Enc. Math. Wiss.*, vol. I, part 1, 47-146 (article IA3).

——*1899* 'Grundlagen der allgemeinen Funktionentheorie', *Enc. Math. Wiss.*, vol. 2, part 1, 1-53 (article IIA1).

——*1990* 'Zur Geschichte des Taylorschen Lehrsatzes', *Bibl. math.*, (3) **1**, 433-379.

Protter, M. H. and Morrey, C. B. *1964 College calculus with analytic geometry, Reading, Mass. (Addison Wesley)*.

Riemann, G. F. B. *1868* 'Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe', *Abh. Gesell. Wiss. Göttingen*, **13** (1866-1867), math K1., 87-132. [También en *Gesammelte mathematische Werke*, 2nd ed. 1892, Leipzig (Teubner), 227-271.]

Siedel, P. L. *1848* 'Note über eine Eigenschaft der Reihen, welche discontinuerliche Funktionen darstellen', *Abh. Akad. Wiss. Munich, math.- phys. Kl.*, **5** (1847: publ. 1849), 381-393.

Stokes, G. G. *1849* 'On the critical values of the sums of periodic series', *Trans. Cambridge Phil. Soc.*, **8**, 533-583. [También en *Mathematical and physical papers*, **1**, 236-313.]

Taylor, A. E. *1974* 'The differential: nineteenth and twentieth century developments', *Arch. hist. exact. sci.*, **12**, 355-383.

Voss, A. *1899* 'Differential- und Integralrechnung', *Enc. Math. Wiss.*, vol. 2, part 1, 54-134 (article IIA2).

Whiteside, D. T. *1961* 'Patterns of mathematical thought in the later 17th century', *Arch. hist. exact. sci.*, **1**, 179-388.

Whittaker, E. T. and Watson, G. N. *1927 A course of modern analysis*, 4th ed., Cambridge (University Press). [Reimpresión en rústica 1965.]

Yushkevich, A. P. *1971* 'Lazare Carnot and the competition of the Berlin Academy in 1786 on the mathematical theory of the infinite', in C. C. Gillispie (ed.), *Lazare Carnot savant*, Princeton (University Press), 149-168. [Manuscrito inédito de Carnot en las páginas 169-268; incluye notas de Yushkevich.]

——*1976* 'The concept of function up to the middle of the 19th century', *Arch. hist. exact. sci.*, **16**, 37-85.

Zermelo, E. *1904* 'Beweis, das jede Menge wohlgeordnet werden kann', *Math. Ann.*, **59**, 514-516. [Traducción al inglés de J. van Heijenoort [ed.], *From Frege to Gödel...*, 1967, Cambridge, Mass. (Harvard University Press), 139-141.]

Joseph W. Dauben, ex-editor de *Historia Mathematica* y actual presidente de la Comisión Internacional de Historiadores de las Matemáticas, ha escrito ensayos sobre Georg Cantor, Charles S. Peirce, Abraham Robinson y sobre bibliografía e historiografía de las matemáticas, entre otros temas. Su libro *Georg Cantor: his mathematics and his philosophy of the infinite* (Cambridge University Press (1979) y Princeton University Press (1989)), es una detallada biografía intelectual del fundador de la teoría de los números cardinales y ordinales transfinitos. Actualmente labora en el Departamento de Historia de la Universidad de la Ciudad de Nueva York (CUNY) y sus intereses académicos se concentran en el estudio de las matemáticas orientales (especialmente las chinas).

Craig Fraser, quien realizó estudios de posgrado en matemáticas en la Universidad de British Columbia y de historia de las ciencias en la Universidad de Toronto y es el actual presidente de la Sociedad Canadiense para la Historia y Filosofía de las Matemáticas, ha publicado trabajos sobre diversos aspectos de la historia y filosofía de las matemáticas de los siglos XVIII y XIX. Su labor docente y de investigación la lleva a cabo en el Instituto para la Historia y Filosofía de las Ciencias y la Tecnología de la Universidad de Toronto y se encuentra trabajando en una monografía sobre la matemática y mecánica de Lagrange.

Ivor Grattan-Guinness, actualmente editor de *History and Philosophy of Logic*, ex-editor de *Annals of Science* y miembro de un gran número de cuerpos editoriales (incluyendo *Mathesis* y *Las Obras Completas de Bertrand Russell*), ha contribuido con sus estudios a muy diversas áreas de la historia de las matemáticas. Entre algunas de sus obras más notables podemos citar: *Dear Russell-Dear Jourdain* y *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1650-1930. Una historia introductoria.* Esta última obra es ampliamente conocida por los lectores hispanoparlantes. Labora en el Middlesex Polytechnic (Gran Bretaña) y algunas de sus contribuciones más recientes han tocado temas y enfoques asociados con la Revolución Francesa y su influencia en el desarrollo de las matemáticas. Actualmente edita una enciclopedia

sobre la historia y filosofía de las ciencias matemáticas que será publicada en 1992 por Routledge (Londres).

Janis Langins, de nacionalidad canadiense, realizó estudios de licenciatura y posgrado en ingeniería química (Universidad de McGill) y más tarde de historia y filosofía de las ciencias y la tecnología (Universidad de Toronto). Es en esta última universidad donde se encuentra laborando actualmente sobre teorías de fortificación en la Francia del siglo XVIII. Ha publicado ensayos sobre diversos aspectos de la vida cultural e intelectual francesa en *Llull, Isis, Revue d'histoire des sciences, Bulletin de la Société des Amis de la Bibliothèque de l'Ecole Polytechnique, Chemical Engineering Science* y *Technology and Culture*, entre otras.

Wilbur R. Knoor, realizó sus estudios de licenciatura en el Harvard College en donde recibió su grado con honores en 1966 y poco más tarde terminó sus estudios de posgrado en la Universidad de Harvard (1973). En la actualidad, sus actividades académicas las comparten los departamentos de filosofía y de clásicos de la Universidad de Stanford. En 1975, revolucionó el mundo académico con la publicación de su monografía *The evolution of the euclidean elements* ... A la fecha ha publicado más de cincuenta ensayos relacionados con diversos aspectos de la historia y filosofía de las matemáticas en la griega clásica y en la edad media. En estos días prepara para Birkhäuser (donde ya publicado otros libros con anterioridad) un texto titulado: *The geometric achievement of Archimedes: sources, development and significance.*